Beiträge zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen der Ordnung Null.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Hans Zöllich
aus Lauchstedt.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Halle a. S.
Buchdruckerei des Waisenhauses
1908.

Referent: Prof. Dr. A. Gutzmer.

Meinen lieben Eltern!

Inhalt.

A. Einleitung 5
B. Erster Teil. Theorie der Vergleichsfunktionen . . 9
§ 1. Die üblichen Vergleichsfunktionen 9
§ 2. Ein Charakteristikum des Wachstums 11
§ 3. Vergleichsfunktionen zu monoton wachsenden Zahlen 11
§ 4. Vergleichsfunktionen zu monoton wachsenden Funktionen 14
§ 5. Die inverse Funktion 16
§ 6. Über die Nachbarwerte von gegebenen Stellen . . . 17
§ 7. Über die Werte an entfernteren Stellen 19
§ 8. Das umgekehrte Problem 25
§ 9. Die Konstruktion von Vergleichsfunktionen 27
C. Zweiter Teil. Allgemeine Sätze über Wachstum und Wertverteilung 29
I. Folgerungen aus der Stärke des Unendlichwerdens . . . 29
§ 1. Eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen . 29
§ 2. Eine untere Schranke für den Absolutwert von c_n . 36
II. Schluß von der Verteilung der Nullstellen auf das Anwachsen der Funktion 40
§ 3. Über das Maximum des Absolutwertes von $f(x)$ . . 40
§ 4. Über das entsprechende Minimum 44
§ 5. Allgemeine Folgerungen über die Wertverteilung . . 50
D. Dritter Teil. Beispiele 53

Einleitung.

Weierstraß, der eigentliche Schöpfer der neueren Funktionentheorie, definiert eine *monogene analytische Funktion* durch eine Potenzreihe mit Hinzunahme des Begriffes der analytischen Fortsetzung. Bricht die Potenzreihe nicht ab und konvergiert sie für den ganzen Bereich der unabhängigen Veränderlichen, so heißt die durch die Potenzreihe definierte Funktion eine *ganze transzendente Funktion*. Die Theorie der ganzen transzendenten Funktionen knüpft nun hauptsächlich an die grundlegende Weierstraßsche Abhandlung vom Jahre 1876 an, nämlich an die dort dargestellte Produktentwicklung der ganzen transzendenten Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen. Diese der Faktorenzerlegung der Algebra entsprechende Produktdarstellung ist die naturgemäße Grundlage für Auffindung und Beweis von Beziehungen zwischen Nullstellen und Funktionswerten.

So sind in zahlreichen Arbeiten Beziehungen entdeckt worden zwischen dem Maximum[1]) $M(\varrho)$ des absoluten Betrages einer ganzen transzendenten Funktion $f(x)$ für die Argumentwerte vom absoluten Betrage ϱ und der Dichtigkeit der Stellen, an welchen die ganze Funktion $f(x)$ den Wert 0, allgemeiner einen beliebigen Wert a annimmt. Zur präzisen Formulierung jener Beziehungen zwischen Wertverteilung und Anwachsen der Funktion braucht man zunächst ein Maß für das Wachstum von monotonen Zahlenfolgen und monotonen Funktionen. Bisher gewann man dies durch wirkliche Heranziehung von „Vergleichsfunktionen“ aus dem Funktionenvorrat, den uns die heutige Analysis darbietet, nämlich durch Einführung der Potenzen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ihrer verschiedensten Kombinationen.

Diese Funktionen sind zwar vorläufig die einzigen, die uns heutzutage in ihrem Verlaufe für „unendlich große“ Argumentwerte ge-

1) $M(\varrho)$ ist bekanntlich eine ständig zunehmende, mit ϱ ins Unendliche wachsende Funktion von ϱ.

nügend vertraut sind; aber sie sind nicht die einzigen regelmäßig wachsenden Funktionen, die existieren: einerseits in den Lücken, andrerseits außerhalb einer aus den üblichen Vergleichsfunktionen gebildeten Skala von Wachstumstypen gibt es eine unermeßliche Anzahl von andern regelmäßig wachsenden Funktionen. Natürlich kann man diese auch mit den gangbaren Wachstumstypen vergleichen, aber man muß sich dann mit einer entsprechend geringeren Annäherung begnügen. Zur Erzielung genauerer Ergebnisse, d. h. solcher, welche die gesuchten Beziehungen nicht bloß in verhältnismäßig groben Umrissen beschreiben, muß man daher auf die wirkliche Heranziehung von speziellen Funktionen als Vergleichsfunktionen verzichten. Ferner — und das ist ausschlaggebend — ist es wünschenswert, die Beweise der Sätze nicht von speziellen Eigenschaften der gewählten Funktionen abhängig zu machen, sondern dazu nur die wirklich wesentlichen Wachstumseigenschaften zu benutzen.

So entsteht der von O. Blumenthal herrührende zuerst in einer Arbeit von A. Kraft[1]) auftauchende Gedanke der Einführung allgemeinster Vergleichsfunktionen, die abgesehen von den notwendigen Beschränkungen ganz willkürlich anzunehmen sind. Dieser an und für sich brauchbare Gedanke führt aber bei der Verwendung von A. Kraft wegen der Unbestimmtheit der den „Vergleichsfunktionen“ auferlegten Bedingungen gerade nur zu einer Theorie sehr rasch wachsender Funktionen. Das liegt daran, weil durch die beliebig zu denkenden Vergleichsfunktionen kein bestimmtes Maß für das Anwachsen gegeben wird, wie das bei den festen speziellen Vergleichsfunktionen der Fall war.

Es ist also noch ein bestimmter Maßstab für das Unendlichwerden einer Funktion zu finden, der ganz allgemein ohne Zuhülfenahme spezieller „Vergleichsfunktionen“ das Wachstum charakterisiert. Dieser findet sich, wie in dieser Arbeit gezeigt wird, durch Betrachtung der Ableitung der wachsenden Funktion. Im allgemeinen, d. h. für eine beliebige monoton wachsende Funktion, wird die Ableitung sich unregelmäßig verhalten, eine bestimmte Ungleichung aber zwischen Ableitung und Funktion wird in gewissen Intervallen überwiegend erfüllt sein. Wir postulieren diese Bedingung zwischen Ableitung und Funktion als für alle Punkte der betr. Intervalle bestehend und er-

1) A. Kraft. „Über ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung“. Dissertation. Göttingen 1903. Vgl. auch: O. Blumenthal. „Über ganze transzendente Funktionen“. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Band 16, S. 97 ff.

halten dadurch eine „Vergleichsfunktion“, die nicht notwendig eine der üblichen speziellen Vergleichsfunktionen ist, deren Wachstum aber gleichwohl durch jene Beziehung zwischen Funktion und Ableitung genügend genau definiert wird.

Nun ist es das in dieser Arbeit zum Ausdruck kommende *Prinzip*, durch die genannte Beziehung die Funktion von einem bestimmten (beliebig gegebenen) Argumentwerte aus für die benachbarten Werte, ja sogar auf große, unbegrenzt mit dem Argument wachsende Entfernungen hinaus zu beherrschen, d. h. Schlüsse auf die angenäherten Werte der Funktion an jenen Stellen zu ziehen. Darum ist im **ersten Teile**, in dem ich eine „Theorie der Vergleichsfunktionen“ entwickle, diese Abschätzung, und zwar für alle monoton wachsenden Vergleichsfunktionen, die erst für „unendliche“ Argumentwerte unendlich werden, durchgeführt worden und damit ein gemeinsamer Unterbau geschaffen für eine Theorie der Beziehungen zwischen Wertverteilung, Unendlichwerden und Abnahme der Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung für alle Klassen ganzer transzendenter Funktionen.

Man hat drei Klassen: je nachdem das Anwachsen der Funktion derart ist, daß $\lg M(\varrho)$ schneller wächst als jede noch so hohe Potenz von ϱ oder langsamer wächst als jede noch so niedrige Potenz von ϱ, spricht man von Funktionen unendlicher oder nullter Ordnung. Die übrig bleibenden ganzen transzendenten Funktionen heißen von endlicher Ordnung.

Jene Beziehungen sind nun für die Funktionen endlicher Ordnung in zahlreichen Arbeiten, wenn auch nur mit Hilfe der speziellen Vergleichsfunktionen, behandelt worden, ebenso auch für die Funktionen von unendlicher Ordnung, für die außerdem in der Arbeit von A. Kraft eine allgemeine Theorie enthalten ist. Dagegen existiert über Funktionen der Ordnung Null nur sehr geringe Literatur, und dabei nur über die Beziehungen zwischen Abnahme der Koeffizienten der Reihenentwicklung und dem Unendlichwerden, bezw. der Wertverteilung (Maillet).

Die noch zu liefernde Theorie der Beziehungen zwischen Wertverteilung und Wachstum für die ganzen transzendenten Funktionen der Ordnung Null versuche ich daher im **zweiten Teile** allgemein mit Hilfe der Ergebnisse des ersten Teiles durchzuführen. Da es nur darauf ankam, die Anwendung der im ersten Teil dargelegten Methoden zu illustrieren, wurde nicht die äußerste erreichbare Schärfe angestrebt, sondern Gewicht gelegt auf möglichst einfache allgemeine Resultate. Jedoch habe ich dann und wann einige Andeutungen ge-

macht, wie man zu genaueren (aber damit unübersichtlichen) Ergebnissen gelangt, um zu zeigen, zu welcher unbegrenzten Genauigkeit man vorkommendenfalls fortschreiten kann, wenn man die im ersten Abschnitt eingeführte Definition des Wachstums durch eine Gleichung zwischen Ableitung und Funktionswert zugrundelegt und eventuell den Begriff des „Grades der Annäherung“ heranzieht.

Zunächst leite ich eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen in einem hinreichend großen Kreise ab, und zwar durch ein Verschärfungsverfahren aus einem bekannten Satze. Darauf wird eine untere Schranke für den Absolutwert der n^{ten} Nullstelle (diese ihrer absoluten Größe nach geordnet) abgeleitet.

Schließlich wird von der gegebenen Verteilung der Nullstellen aus auf das Maximum und Minimum des absoluten Betrages der zugehörigen Funktion auf dem Kreise mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt geschlossen; dabei ergibt sich für das Minimum ein von dem entsprechenden Satze für endliche und unendliche Ordnung abweichendes Ergebnis, das darin besteht, daß die Funktion auf allen Wegen ins Unendliche unbegrenzt wächst, wenn man die Nullstellen durch beliebig kleine Kreise ausschließt.

Daraus ergeben sich einige Folgerungen über die Wertverteilung im allgemeinen.

Schließlich werden im **dritten Teile** einige Anwendungen der erhaltenen allgemeinen Sätze gegeben, indem Vergleichsfunktionen analog denen, die für endliche Ordnung üblich sind, herangezogen werden.

Erster Teil.

Theorie der Vergleichsfunktionen.

§ 1. Die üblichen Vergleichsfunktionen.

Die zunächst sich darbietenden Funktionen mit wohlbekannten typischen Wachstumseigenschaften sind die Potenzen. Mit diesen wurde denn auch zunächst $\lg M(\varrho)$ verglichen; und daraus entstand die Bezeichnung: unendliche, endliche, nullte Ordnung (ν-Index). Eine ganze transzendente Funktion $f(x)$ ist „von der Ordnung Null", wenn

$|f(x)| < e^{\varrho^{\varepsilon}}$ für alle hinreichend großen $|x| = \varrho$ bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$.

Sie heißt „von endlicher Ordnung", wenn bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$|f(x)| < e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}}$ für alle Werte von $|x| = \varrho$ besteht, die größer sind, als eine bestimmte Zahl,

während es nach Annahme irgend einer positiven Größe R stets zugleich Werte $|x| > R$ gibt, für die:

$$|f(x)| > e^{\varrho^{\nu-\varepsilon}}.$$

Sie ist „von unendlicher Ordnung", wenn bei beliebig großem k

$|f(x)| > e^{\varrho^{k}}$ für alle hinreichend großen $|x| = \varrho$.

Durch diese Vergleichung von $\lg M(\varrho)$ mit Potenzen ϱ^{α} werden zwar alle möglichen Wachstumsarten getroffen, aber doch nur mit sehr grober Annäherung. Denn nimmt man die ε noch so klein, *schließlich* ist doch $|x|^{\varepsilon}$ größer als jede noch so große Zahl, ja es wird sogar größer als gewisse unbegrenzt wachsende Funktionen, z. B. $\lg|x|$, oder $(\lg|x|)^{\varkappa}$, wo $\varkappa$ beliebig groß. Die beiderseitigen Ungleichungen:

$$e^{\varrho^{\nu-\varepsilon}} < M(\varrho) < e^{\varrho^{\nu+\varepsilon}}$$

geben selbst bei beliebig kleinem ε nur sehr weite Schranken an, die unbegrenzt viele verschiedene Möglichkeiten in sich fassen.

Eine Einengung der Schranken erzielt man durch Hinzuziehung der Logarithmen und Exponentialfunktionen. So ist für die Funktionen endlicher Ordnung:

$M(\varrho) < e^{\varrho^\nu (\lg \varrho)^{\alpha_1} (\lg_2 \varrho)^{\alpha_2} \dots (\lg_p \varrho)^{\alpha_p + \varepsilon}}$ ständig von einem gewissen ϱ ab,

$M(\varrho) > e^{\varrho^\nu (\lg \varrho)^{\alpha_1} (\lg_2 \varrho)^{\alpha_2} \dots (\lg_p \varrho)^{\alpha_p - \varepsilon}}$ für gewisse beliebig große ϱ.[1])

Es ist also $\lg M(\varrho)$ nicht nur mit ϱ^ν, sondern mit einem Ausdruck der Form:

$$\varrho^\nu (\lg \varrho)^{\alpha_1} \dots (\lg_p \varrho)^{\alpha_p}$$

verglichen. Sämtliche denkbaren Kombinationen der $\alpha_1 \dots \alpha_p$ liegen alle in dem einen obigen Falle ϱ^ν mit den dortigen weiteren Schranken.

Entsprechend kann man für die Funktionen der Ordnung Null ansetzen:

$M(\varrho) < e^{\lg \varrho (\lg_\nu \varrho)^{\alpha_\nu} \dots (\lg_{\nu+p} \varrho)^{\alpha_{\nu+p} + \varepsilon}}$ ständig von einem gewissen ϱ ab,

$M(\varrho) > e^{\lg \varrho (\lg_\nu \varrho)^{\alpha_\nu} \dots (\lg_{\nu+p} \varrho)^{\alpha_{\nu+p} - \varepsilon}}$ für gewisse beliebig große ϱ,

wo $\nu = 1, 2, 3 \dots$.

Und für die Funktionen von unendlicher Ordnung:

$M(\varrho) < e^{e_\nu [\varrho^\varkappa (\lg \varrho)^{\alpha_1} \dots (\lg_p \varrho)^{\alpha_p + \varepsilon}]}$ ständig von einem gewissen ϱ ab,

$M(\varrho) > e^{e_\nu [\varrho^\varkappa (\lg \varrho)^{\alpha_1} \dots (\lg_p \varrho)^{\alpha_p - \varepsilon}]}$ für gewisse beliebig große ϱ,

wo $\nu = 1, 2, 3 \dots$.

Die Schranken sind bedeutend enger geworden, als im ursprünglichen Ansatz, immerhin sind sie noch so weit, daß sie noch unbegrenzt viele Wachstumsmöglichkeiten für $M(\varrho)$ zwischen sich zulassen, denn es gibt immer monoton unendlich werdende Funktionen, die kleiner sind als $(\lg_p \varrho)^\varepsilon$ bei beliebig kleinem ε, so z. B. alle höher iterierten Logarithmen.

Die Genauigkeit der Wachstumsdefinition, d. h. die Einengung der Schranken, können wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln der Analysis nicht weiter treiben, theoretisch ist aber weitere Verschärfung möglich. Denn es gibt Funktionen von einer Langsamkeit des Wachstums, die hinter der beliebig oft wiederholter Logarithmen zurückbleibt, während es anderseits Funktionen von einer Schnelligkeit des Wachstums gibt, mit der keine noch so hoch getürmte Exponentialfunktion Schritt hält. Denken wir uns je eine Funktion dieser beiden letzten Klassen gegeben, so können wir wieder

---

1) $\lg_\nu \varrho$ bedeutet, wie üblich, den ν-fach iterierten Logarithmus:
$\lg_2 \varrho = \lg \lg \varrho$, ..., $\lg_\nu \varrho = \lg (\lg_{\nu-1} \varrho)$; analog: $e(\varrho) = e^\varrho$; $e_2(\varrho) = e^{e^\varrho}$; .....

neue Funktionen bilden, die an Langsamkeit oder Schnelligkeit des Anwachsens die noch so oft iterierten letzten Funktionen übertreffen. Das läßt sich unbegrenzt weiter fortsetzen. Ständen uns diese neuen Funktionen zur Verfügung und wären sie analytisch hinreichend bekannt, so könnten wir noch schärfere Wachstumsdefinitionen für $\lg M(\varrho)$ aufstellen und in analoger Weise, wie es bei den andern Definitionen üblich ist, die daraus sich ergebenden Wertverteilungen herleiten. Und so fort bei jeder neuen Funktion, die langsamer oder schneller wächst, als die vorher benutzten, wenn sie noch so oft iteriert werden.

Alle diese Funktionen sind uns nun nicht bekannt, und selbst, wenn wir deren beliebig viele zur Verfügung hätten, könnten wir sie nie erschöpfen. Weshalb sollen wir da die Vergleichsfunktionen explizit angeben; angemessener ist es doch, die allgemeinsten Vergleichsfunktionen anzusetzen, ohne nähere Angabe ihrer analytischen Form.

Ganz ähnlich verhält es sich mit „Funktionen“, die nicht stetig sind, sondern nur für ganzzahlige Argumentwerte definiert sind; d. h. also mit positiven Zahlen M_ν, die mit dem Index ν monoton ins Unendliche wachsen. Solche Zahlen sind die absoluten Beträge der nach steigender Größe geordneten Argumentwerte, für welche $f(x)$ den Wert a annimmt; und auch die reziproken Werte der absoluten Beträge der Koeffizienten der Entwicklung von $f(x)$ in eine Potenzreihe.

§ 2. Ein Charakteristikum des Wachstums.

Es sei uns eine monoton mit ν ins Unendliche wachsende Folge von Zahlen $M_\nu > 0$ vorgelegt; als charakteristisch für das schnellere oder langsamere Wachstum wird man offenbar die Differenzen aufeinander folgender Glieder bezeichnen, oder auch die Quotienten.

Ähnlich ist für das Wachstum stetiger (monotoner) Funktionen in einem beliebigen Punkte die betr. Ableitung charakteristisch; sie ist das Maß des Wachstums.

Die Differenz aufeinander folgender Glieder einer Zahlenfolge ist in der Regel veränderlich; man muß sie sich abhängig denken von dem letzten Glied, und ebenso ist bei einer Funktion die Ableitung in Beziehung zu setzen zu dem **zugehörigen** Funktionswert, wenn man die Vergleichsfunktion allgemein ansetzen will.

§ 3. Vergleichsfunktionen zu monoton wachsenden Zahlen.

Das Anwachsen der Zahlenfolgen ist im allgemeinen unregelmäßig. Unregelmäßigkeiten im Wachstum würden uns aber verhindern,

von einem M_ν aus auf die folgenden $M_{\nu+1}, \ldots$ zu schließen, da wir ja nicht wissen, wo etwa eine solche Unregelmäßigkeit vorhanden ist. Derartige Funktionen können wir nicht als Vergleichsfunktionen gebrauchen; von diesen müssen wir vielmehr verlangen, daß sie regelmäßig wachsen; d. h. daß gewisse nicht allzu beschränkende Beziehungen zwischen Differenzen aufeinander folgender Glieder und dem letzten Glied *für alle Stellenzeiger ν ausnahmslos gelten.* — Um nun solche das Wachstum charakterisierende Beziehungen zu finden, kann man ausgehen von der Theorie der Konvergenz und Divergenz der Reihen (von Pringsheim). Dort wird gezeigt, daß man das allgemeine Glied einer divergenten Reihe in die folgende Form bringen kann:

$\delta_\nu = \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}$, wo M_ν eine beliebige mit ν monoton ins Unendliche wachsende Funktion bedeutet.

Langsamer divergente Reihen sind dann die mit den Gliedern:

$$\delta_\nu^{(1)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \lg M_\nu}, \ldots, \delta_\nu^{(\varkappa)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa (M_\nu)}, \text{ wo } L_\varkappa (z) = z \lg z \lg_2 z \ldots \lg_\varkappa z.$$

Reihenglieder werden also auf monoton wachsende Funktionen zurückgeführt; wir können umgekehrt verfahren: wir legen das δ_ν fest: $\delta_\nu = \delta_\nu^{(1)} = \ldots = \delta_\nu^{(\varkappa)} \ldots$ und definieren so mit denselben Gleichungen wie oben verschieden schnell wachsende Funktionen:

$$(1) \quad M_{\nu+1} - M_\nu = M_\nu \delta_\nu$$
$$(2) \quad M_{\nu+1}^{(1)} - M_\nu^{(1)} = M_\nu^{(1)} \lg M_\nu^{(1)} \delta_\nu$$
$$(3) \quad M_{\nu+1}^{(\varkappa)} - M_\nu^{(\varkappa)} = L_\varkappa (M_\nu^{(\varkappa)}) \delta_\nu.$$

Für δ_ν wählen wir die einfachsten Typen von Gliedern divergenter Reihen, die zugleich die einfachsten Funktionen der Argumente sind. Das sind: $\dfrac{1}{\nu}; \dfrac{1}{\nu \lg \nu} \cdots \dfrac{1}{L_\varkappa (\nu)} \cdots$

Nehmen wir zunächst $\delta_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, dann ergibt sich die folgende Skala von immer schneller wachsenden Zahlenfolgen:

$$M_{\nu+1} - M_\nu = \frac{M_\nu}{\nu}$$
$$M_{\nu+1}^{(1)} - M_\nu^{(1)} = \frac{M_\nu^{(1)} \lg M_\nu^{(1)}}{\nu}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$M_{\nu+1}^{(\varkappa)} - M_\nu^{(\varkappa)} = \frac{L_\varkappa (M_\nu^{(\varkappa)})}{\nu}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

Gehen wir andrerseits von (1) aus, das einen mittleren Typus definiert, und setzen sukzessive $\frac{1}{\nu}$; $\frac{1}{\nu \lg \nu}$; $\ldots \frac{1}{L_\varkappa(\nu)} \ldots$ für δ_ν ein, so erhalten wir die folgende Skala von immer langsamer wachsenden Funktionen:

$$M_{\nu+1} - M_\nu = \frac{M_\nu}{\nu}$$

$$M^{(1)}_{\nu+1} - M^{(1)}_\nu = \frac{M^{(1)}_\nu}{\nu \lg \nu}$$

. . . . . .

$$M^{(\varkappa)}_{\nu+1} - M^{(\varkappa)}_\nu = \frac{M^{(\varkappa)}_\nu}{L_\varkappa(\nu)}$$

. . . . . .

Wir haben bis jetzt nur spezielle Zahlenfolgen definiert, weil wir der Einfachheit halber als typische Glieder von divergenten Reihen zunächst $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{\nu \lg \nu}$ ... genommen haben; wir umspannen aber *alle überhaupt möglichen* regelmäßig anwachsenden Zahlenfolgen, wenn wir ansetzen: $\frac{\varkappa_\nu}{\nu}$; $\frac{\varkappa_\nu}{\nu \lg \nu} \ldots$, wo $\varkappa_\nu$ Zahlen sind, die für alle ν einen endlichen positiven Wert haben. Der Regelmäßigkeit der „Vergleichsfolge“ halber verlangen wir, daß $\varkappa_\nu$ mit ν monoton zunimmt oder abnimmt.[1]) — Würden wir für $\varkappa_\nu$ eine nach Null konvergierende oder eine unbegrenzt wachsende Folge einsetzen, so kämen wir auf „Vergleichsfolgen“, die schon in andern Zeilen stehen. — Damit haben wir nunmehr die folgende Skala von sehr schnell anwachsenden bis zu langsam zunehmenden Zahlenfolgen (der Einfachheit halber sämtlich mit M_ν bezeichnet):

. . . . . .

$$M_{\nu+1} - M_\nu = \frac{\varkappa_\nu M_\nu \lg M_\nu \ldots \lg_p M_\nu}{\nu}$$

. . . . . .

$$M_{\nu+1} - M_\nu = \frac{\varkappa_\nu M_\nu \lg M_\nu}{\nu}$$

$$M_{\nu+1} - M_\nu = \frac{\varkappa_\nu M_\nu}{\nu}$$

---

1) Eine weitere Beschränkung, die ein gleichmäßiges Zu- oder Abnehmen von $\varkappa_\nu$ verbürgen würde, führt zu weitaus schärferen Abschätzungen (s. u.), ist aber für die in dieser Arbeit gebrauchte Genauigkeit unnötig.

$$M_{\nu+1} - M_\nu = \frac{\varkappa_\nu M_\nu}{\nu \lg \nu}$$

. . . . . .

$$M_{\nu+1} - M_\nu = \frac{\varkappa_\nu M_\nu}{\nu \lg \nu \ldots \lg_p \nu}$$

. . . . . .

Als Grenzen nach oben und unten hin müssen wir ansetzen:

$M_{\nu+1} - M_\nu < \frac{L_\varkappa(M_\nu)[\lg_\varkappa M_\nu]^\varepsilon}{\nu}$, wo $\varkappa$ beliebig groß, ε beliebig klein.

$M_{\nu+1} - M_\nu > \frac{M_\nu}{L_\varkappa(\nu)[\lg_\varkappa \nu]^\varepsilon}$, wo $\varkappa$ beliebig groß, ε beliebig klein.

§ 4. Vergleichsfunktionen zu monoton wachsenden Funktionen.

Man kann für die Zahlenfolgen, wie nachher für Funktionen, gleichfalls Abschätzungen ausführen, sogar mit elementaren Mitteln; indem man z. B. $M_{\nu+m}$ durch *Summation* berechnet; für nicht ganze Werte m kann dann $M_{\nu+m}$ zwischen zwei Grenzen eingeschlossen werden; aber diese Grenzen erweisen sich als sehr weit auseinander liegend. In der Tat hat schon Borel[1]) an einem Beispiel gezeigt, daß bei sehr schnell wachsenden Funktionen die Werte derselben für ganzzahlige Argumente keinen genügenden Aufschluß geben über die Werte für die übrigen Argumentwerte. Selbst wenn man die Werte der Funktion für alle rationalen Argumente kennen würde, braucht das nicht zur Beurteilung des Verhaltens der Funktion an den andern Stellen auszureichen, wenigstens wenn man eine gewisse Genauigkeit vorschreibt; nur für sehr langsam wachsende Funktionen reichen einzelne, nicht zu weit liegende Werte aus, falls man denselben Genauigkeitsgrad beibehalten will, d. h. ihn nicht entsprechend verschärft.

Genaue Abschätzungen sind daher bei monotonen Funktionen nur durch Übergang zur Summe über unendlich viele unendlich nahe Werte, d. h. zum Integral, möglich; an die Stelle der Differenzen müssen Differentialquotienten treten. Unsere obige Skala nimmt für Funktionen also die folgende Gestalt an:

(1) $\mathfrak{F}'(x) < \frac{\mathfrak{F}(x) \lg \mathfrak{F}(x) \ldots [\lg_r \mathfrak{F}(x)]^{1+\varepsilon}}{x}$, wo ε beliebig klein, r beliebig groß.

. . . . . .

(2) $\mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\mathfrak{F}(x) \lg \mathfrak{F}(x) \ldots \lg_p \mathfrak{F}(x)}{x}$

. . . . . .

1) Séries à termes positifs, S. 29.

$$(3)\quad \mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)\lg\mathfrak{F}(x)}{x}$$

$$(4)\quad \mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x}$$

$$(5)\quad \mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x\lg x}$$

. . . . . .

$$(6)\quad \mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x\lg x \ldots \lg_p x}$$

. . . . . .

$$(7)\quad \mathfrak{F}'(x) > \frac{\mathfrak{F}(x)}{x\lg x \ldots . [\lg_r x]^{1+\varepsilon}}$$, wo ε beliebig klein, r beliebig groß.

Dabei ist x eine reelle positive Veränderliche und $\varkappa(x)$ eine stets endlich bleibende positive Funktion. Für die $\varkappa(x)$ wird hier nur angenommen, daß sie monoton wachsen oder abnehmen; eine etwas mehr einschränkende Annahme, die nur ein regelmäßiges Zu- und Abnehmen von $\varkappa(x)$ zuläßt, ohne jedoch zu Spezielles zu verlangen, führt zu bedeutend schärferen Resultaten. Diese sind aber für den in dieser Arbeit in Betracht kommenden Genauigkeitsgrad zwecklos. Nur aus diesem Grunde soll von einer sonst den $\varkappa(x)$ aufzuerlegenden Bedingung abgesehen werden.

Durch die obigen Gleichungen wird eine sehr spezielle Klasse von reellen positiven Funktionen einer reellen positiven Variabeln definiert: Gleichungen zwischen Ableitung und Funktion, die bei einer beliebigen Funktion dieser Art in gewissen Intervallen nur für die „überwiegende“ Zahl der x gelten, sollen bei dieser Klasse in den gleichen Intervallen ausnahmslos für alle x gültig sein; wir nennen Funktionen mit diesen Eigenschaften „*Vergleichsfunktionen*“, definiert für jene Intervalle.[1])

Durch die obige Tabelle sind sämtliche „Vergleichsfunktionen“ erschöpft, die für unendliche Argumentwerte unendlich werden; daneben gibt es natürlich noch Vergleichsfunktionen (d. h. also Funktionen, bei denen eine gewisse Beziehung zwischen Ableitung und Funktion für alle Argumente gilt), die schon für endliche x unendlich werden und solche, die für unendliche x noch endlich bleiben. Nur beispielsweise seien einige solche angeführt:

---

1) Nimmt man alle Intervalle zusammen, so hat man also eine Funktion, die aus Stücken von „Vergleichsfunktionen“ zusammengesetzt ist.

(a) $\mathfrak{F}'(x) = \dfrac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{e_p(x)}$; $p = \ldots 3, 2, 1$

(b) $\mathfrak{F}'(x) = \dfrac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x^p}$; $p = \ldots 4, 3, 2$

(c) $\mathfrak{F}'(x) = \dfrac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x \lg x \ldots (\lg_p x)^2}$; $p = 1, 2, 3 \ldots$

} Bei gleichem $\varkappa(x)$ immer schnelleres Anwachsen nach derselben Ordinate.

(a′) $\mathfrak{F}'(x) = \dfrac{\varkappa(x)\,e_p[\mathfrak{F}(x)]}{x}$; $p = \ldots 3, 2, 1$

(b′) $\mathfrak{F}'(x) = \dfrac{\varkappa(x)\,[\mathfrak{F}(x)]^p}{x}$; $p = \ldots 4, 3, 2$

(c′) $\mathfrak{F}'(x) = \dfrac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x) \lg \mathfrak{F}(x) \ldots [\lg_p \mathfrak{F}(x)]^2}{x}$; $p = 1, 2, 3 \ldots$

} Bei gleichem $\varkappa(x)$ immer langsameres Unendlichwerden für dieselben Abszissen.

Anm. 1. Blumenthal und Kraft definieren eine Vergleichsfunktion bloß durch die Ungleichung: $\mathfrak{F}'(x) < \dfrac{[\mathfrak{F}(x)]^{1+\varepsilon}}{x}$. (Die andre von ihnen noch angeführte Bedingung ist, wie sich zeigen wird, überflüssig.) Diese ist notwendig [nicht hinreichend! vgl. (c′)] *bloß* dazu, daß die Funktion nicht schon für endliche x unendlich werde, es sind also immer noch sehr starke Unregelmäßigkeiten des Wachstums möglich, da sämtliche Gleichungen unserer Skala S. 14f. dieser Forderung genügen. Unser Prinzip, *den Verlauf der Vergleichsfunktion zu beherrschen*, wäre hier nicht anwendbar oder führte nicht zu genauen Resultaten.

Anm. 2. Für Funktionen endlicher Ordnung kommt einzig und allein (4) in Frage, alle darüber gehören zur Theorie der g. tr. Funktionen unendlicher Ordnung, alle darunter zu der nullter Ordnung. Die Klasse der ganzen Funktionen endlicher Ordnung ist demnach viel weniger umfassend, als die der Funktionen unendlicher und nullter Ordnung.

§ 5. Die inverse Funktion.

Aus den oben aufgestellten Definitionsgleichungen für Vergleichsfunktionen soll der Verlauf der Funktionen berechnet werden; dazu muß man häufig auf die entsprechende inverse Funktion zurückgehen. — Aus den Definitionsgleichungen gegebener Vergleichsfunktionen, d. h. aus ihren Wachstumseigenschaften, lassen sich die der inversen Funktion ableiten.

Zunächst ist bekannt, daß monoton wachsende Funktionen eine eindeutige Umkehrung gestatten; diese ist dann wieder eine monoton wachsende Funktion.

Ferner ist der Differentialquotient der umgekehrten Funktion gleich dem reziproken Wert des Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion; ist z. B.

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad x = \varphi(y),$$

dann ist: $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \varphi'(y).$$

So folgt aus

$$\mathfrak{F}'(\xi) = \frac{\varkappa_1(\xi)\,\mathfrak{F}(\xi)\lg\mathfrak{F}(\xi)}{\xi}, \text{ wenn } \mathfrak{F}(\xi) = \eta\ ;\ \xi = \mathfrak{G}(\eta):$$

$$\mathfrak{G}'(\eta) = \frac{\xi}{\varkappa_1(\xi)\,\mathfrak{F}(\xi)\lg\mathfrak{F}(\xi)} = \frac{\varkappa_2(\eta)\,\mathfrak{G}(\eta)}{\eta\lg\eta}.$$

Man sieht hieraus, daß in unserer Skala je zwei Funktionen außer der mittelsten (4) einander invers sind.

Die Umkehrung wird bei den Wertberechnungen von $\mathfrak{F}$ aus dem Anwachsen häufig gute Dienste leisten; man hat es z. B. in der Hand, den Verlauf von sehr rasch wachsenden Funktionen zu untersuchen durch Betrachtung der umgekehrten Funktion, die eine sehr langsam wachsende ist und darum bedeutend genauere Abschätzungen gestattet.

§ 6. Über die Nachbarwerte von gegebenen Stellen.

Ist uns eine Gleichung $\mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x\lg x}$ vorgelegt, ja sogar, wenn uns nur gegeben ist: $\frac{\varkappa_1\,\mathfrak{F}(x)}{x\lg x} < \mathfrak{F}'(x) < \frac{\varkappa_2\,\mathfrak{F}(x)}{x\lg x}$, so können wir bei beliebig weit auseinanderliegend gegebenen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ immer Schlüsse ziehen auf die ungefähre Größe der Werte, welche die Vergleichsfunktion an den unmittelbar benachbarten Stellen zu einem gegebenen x annimmt. Das ist sogar bei beliebig rasch wachsenden Funktionen bei geeigneter Wahl der Abstände möglich. — Zu diesen Schlüssen kann man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung benutzen:

$$f(\xi+h) - f(\xi) = h\,f'(\xi+\vartheta h)\ ;\quad 0 < \vartheta < 1.$$

Z. B. die obere Grenze für den Wert an der Stelle $x + \frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}$ für eine auch noch so rasch wachsende Funktion ergibt sich folgendermaßen:

$$\mathfrak{F}\left(x + \frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right) - \mathfrak{F}(x) = \frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\,\mathfrak{F}'\left(x + \frac{\vartheta}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right)$$

$$< \frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\,\frac{\mathfrak{F}\left(x + \frac{\vartheta}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right)^{1+\varepsilon'}}{x + \frac{\vartheta}{e^{\mathfrak{F}(x)}}}$$

$$< \frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\,\frac{\mathfrak{F}\left(x + \frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right)^{1+\varepsilon'}}{x}$$

oder: $\mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right)<\frac{\mathfrak{F}(x)}{1-\frac{[\mathfrak{F}(x)]^{\varepsilon''}}{x\,e^{\mathfrak{F}(x)}}}$

$$\mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right)<\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{(1+\delta)[\mathfrak{F}(x)]^{\varepsilon''}}{x\,e^{\mathfrak{F}(x)}}\right],\ \text{denn}\ [\mathfrak{F}(x)]^{\varepsilon''}\prec e^{\mathfrak{F}(x)};$$

erst recht: $\mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right)<\mathfrak{F}(x)\,(1+\varepsilon)$, wo ε beliebig klein.

Hierbei ist nur vorausgesetzt worden[1]) $\mathfrak{F}'(x)<\frac{[\mathfrak{F}(x)]^{1+\varepsilon'}}{x}$.

Die Stelle $x+\frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}$ liegt wegen des raschen Wachstums von $\mathfrak{F}$ sehr nahe an x und rückt mit wachsendem x sehr schnell noch näher an x; nicht so nahe liegende Stellen, wie $x+\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}$, wo α beliebig >0, geben immer noch dasselbe Resultat.

Ein etwas verschiedenes Ergebnis erhält man auf ähnliche Weise für den nicht so nahe an x liegenden Wert $x+\frac{1}{\lg \mathfrak{F}(x)}$:

$$\mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{\lg \mathfrak{F}(x)}\right)<[\mathfrak{F}(x)]^{1+\varepsilon}$$

Diese Ungleichung ist gleichwertig mit der folgenden:

$$\mathfrak{F}'(x)<[\mathfrak{F}(x)]^{1+\varepsilon},$$

da sie sich gegenseitig vertreten können.[2])

Die angewandte Schlußweise führt zu ähnlichen Ergebnissen erst recht bei langsam wachsenden Funktionen.

Es sei nur abgeleitet:

1. Voraussetzung: $\mathfrak{F}'(x)<\frac{\varkappa\,\mathfrak{F}(x)}{x\lg x}$.

$$\mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\right)-\mathfrak{F}(x)-\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\mathfrak{F}'\left(x+\frac{\vartheta}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\right)$$

$$<\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\frac{\varkappa\mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\right)}{x\lg x}$$

oder: $\mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\right)<\frac{\mathfrak{F}(x)}{1-\frac{\varkappa}{x\lg x}\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}}$

---

1) Annahme von A. Kraft; s. S. 9. Nr. 4; dsgl. O. Blumenthal; s. S. 100. Nr. III.

2) Vgl. dagegen: Kraft, Diss. S. 9 und Blumenthal, S. 100 f.

$$\text{(a)}\quad \mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\right)<\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa+\varepsilon}{x\lg x\,[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\right]$$

analog:

$$\text{(b)}\quad \mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right)<\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa+\varepsilon}{x\lg x\,e^{\mathfrak{F}(x)}}\right]$$

$$\text{(c)}\quad \mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{\lg\mathfrak{F}(x)}\right)<\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa+\varepsilon}{x\lg x\lg\mathfrak{F}(x)}\right].$$

2. Voraussetzung: $\mathfrak{F}'(x)<\dfrac{\varkappa\,\mathfrak{F}(x)}{x}$

$$\text{(a')}\quad \mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{e^{\mathfrak{F}(x)}}\right)<\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa+\varepsilon}{x\,e^{\mathfrak{F}(x)}}\right]$$

$$\text{(b')}\quad \mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\right)<\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa+\varepsilon}{x\,[\mathfrak{F}(x)]^{\alpha}}\right]$$

$$\text{(c')}\quad \mathfrak{F}\left(x+\frac{1}{\lg\mathfrak{F}(x)}\right)<\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa+\varepsilon}{x\lg\mathfrak{F}(x)}\right]\quad\text{usw.}$$

§ 7. Über die Werte an entfernteren Stellen.

Bei sehr rasch wachsenden Funktionen können Werte an noch so nahe an x liegenden Stellen $x+\delta$, δ beliebig klein >0, beliebig hohe Potenzen des Wertes an der Stelle x sein.[1]) Dagegen kann man bei sehr langsam wachsenden Funktionen beliebig weit von x fortgehen, und man hat doch nur eine ganz verschwindende Zunahme. Zwischen diesen Extremen liegen die übrigen Funktionen. — Ein klares Bild von den verschiedenen Arten des Wachstums erhält man durch die nachfolgenden Abschätzungen.

a. Langsam wachsende Funktionen.

1. Voraussetzung:

$$\mathfrak{F}'(x)=\frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x\lg x}.$$

a) Berechnung von $\mathfrak{F}(x+m):\mathfrak{F}(x)$.

Es ist: $\lg(\mathfrak{F}(x+m):\mathfrak{F}(x))=\lg\mathfrak{F}(x+m)-\lg\mathfrak{F}(x)=\int\limits_{x}^{x+m}\frac{\varkappa(x)\,dx}{x\lg x}$.

Nach dem 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung ist nun:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,\varphi(x)dx=f(\xi)\int\limits_{a}^{b}\varphi(x)\,dx,\quad\text{wo}\quad\xi=a+\vartheta(b-a)\;;\;0\leqq\vartheta\leqq1$$

oder: $$m\int\limits_{a}^{b}\varphi(x)\,dx\leqq\int\limits_{a}^{b}f(x)\,\varphi(x)\,dx\leqq M\int\limits_{a}^{b}\varphi(x)\,dx,$$

1) Vgl. Borel. Acta mathematica, Bd. 20, S. 370.

also hier: $\lg \frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} = \int_x^{x+m} \frac{\varkappa(x)\,\mathrm{d}x}{x \lg x} = \varkappa(\xi) \int_x^{x+m} \frac{\mathrm{d}x}{x \lg x}$; $\xi = x + \vartheta m$, wo $0 \leqq \vartheta \leqq 1$,

$$\text{d. h. } \lg \frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} = \varkappa(\xi)\,[\lg_2 (x+m) - \lg_2 x]$$

oder in der andern Form:
bei abnehmendem $\varkappa$:

$$\varkappa(x+m)\,[\lg_2 (x+m) - \lg_2 x] \leqq \lg \frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} \leqq \varkappa(x)\,[\lg_2 (x+m) - \lg_2 x]$$

bei zunehmendem $\varkappa$:

$$\varkappa(x)\,[\lg_2 (x+m) - \lg_2 x] \leqq \lg \frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} \leqq \varkappa(x+m)\,[\lg_2 (x+m) - \lg_2 x].$$

Da $\varkappa(x)$ und $\lg_2 x$ monoton sind, gelten die Gleichheitszeichen nicht.

Die ungefähre Lage von ξ kann man nur bei gegebenem $\varkappa(x)$ abschätzen; oder bei regelmäßigem Anwachsen von $\varkappa(x)$ (vgl. S. 15). Allgemein ist diese Abschätzung (selbst bei großen Intervallen) nicht notwendig; denn die Differenz von $\varkappa(x_1)$, $\varkappa(x_2)$ ist bei hinreichend großen x_1, x_2 kleiner als eine in jedem Fall bestimmt anzugebende nach Null konvergierende Funktion, weil $\varkappa(x)$ eine monotone Funktion ist, die für unendliche x endlich bleibt.

Unsere Formel für $\lg \frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)}$ gilt für alle m; setzen wir speziell m als endliche Zahl an, so erhalten wir:

$$\lg \frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} = \varkappa(\xi_1) \left[\lg_2 x + \lg \left(1 + \frac{\lg\left(1 + \frac{m}{x}\right)}{\lg x} \right) - \lg_2 x \right]$$

$$\frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} = \left[1 + \frac{\lg\left(1 + \frac{m}{x}\right)}{\lg x} \right]^{\varkappa(\xi_1)} < \left(1 + \frac{m}{x \lg x} \right)^{\varkappa(\xi_1)}$$

also: $\mathfrak{F}(x+m) < \mathfrak{F}(x) \left(1 + \frac{\varkappa m}{x \lg x} \right)$, wo $\varkappa$ passend gewählt.

b) Berechnung von $\mathfrak{F}(x\,n) : \mathfrak{F}(x)$.

Setzen wir in der für alle m geltenden Gleichung:

$m = (n-1)x$, so ergibt sich:

$$\lg \frac{\mathfrak{F}(x\,n)}{\mathfrak{F}(x)} = \varkappa(\xi_2)\,[\lg_2 (x\,n) - \lg_2 x]\text{, also für endliche } n\text{:}$$

$$\lg \frac{\mathfrak{F}(x\,n)}{\mathfrak{F}(x)} = \varkappa(\xi_2)\,[\lg_2 x + \lg\left(1+\frac{\lg n}{\lg x}\right) - \lg_2 x]$$

$$\frac{\mathfrak{F}(x\,n)}{\mathfrak{F}(x)} = \left(1+\frac{\lg n}{\lg x}\right)^{\varkappa(\xi_2)}$$

oder: $$\mathfrak{F}(x\,n) < \mathfrak{F}(x)\left(1+\frac{\varkappa \lg n}{\lg x}\right);$$ wo $\varkappa$ passend.

c) Berechnung von $\mathfrak{F}(x^p) : \mathfrak{F}(x)$.

Setzen wir in die allgemeine Gleichung von b) $n = x^{p-1}$ ein, so ergibt sich:

$$\lg \frac{\mathfrak{F}(x^p)}{\mathfrak{F}(x)} = \varkappa(\xi_3)\,[\lg_2(x^p) - \lg_2 x]$$

$$\lg \frac{\mathfrak{F}(x^p)}{\mathfrak{F}(x)} = \varkappa(\xi_3)\lg p$$

$$\frac{\mathfrak{F}(x^p)}{\mathfrak{F}(x)} = p^{\varkappa(\xi_3)},$$

für endliche p demnach:

$$\mathfrak{F}(x^p) = \mathfrak{F}(x)\,p^{\varkappa(\xi_3)} < \mathfrak{F}(x)\,p^{\varkappa}\,;\ \varkappa \text{ passend.}$$

d) Berechnung von $\mathfrak{F}(x^{q(x)}) : \mathfrak{F}(x)$.

Das p unter c) kann auch eine wachsende Funktion von x sein, es gilt demnach allgemein für ganz beliebige $q(x)$:

$$\mathfrak{F}(x^{q(x)}) = \mathfrak{F}(x)\,q(x)^{\varkappa(\xi_4)}.$$

2. Voraussetzung:

$$\underline{\mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x \lg x \lg_2 x}}$$

Allgemeine Formel:

$$\lg \frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} = \int_x^{x+m} \frac{\varkappa(x)\,\mathrm{d}x}{x \lg x \lg_2 x} = \varkappa(\xi_1) \int_x^{x+m} \frac{\mathrm{d}x}{x \lg x \lg_2 x} = \varkappa(\xi_1)\,[\lg_3(x+m) - \lg_3 x].$$

Daraus: (a)
$$\mathfrak{F}(x+m) = \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\lg\left(1+\frac{\lg\left(1+\frac{m}{x}\right)}{\lg x}\right)}{\lg_2 x}\right]^{\varkappa(\xi_1)}$$

$$< \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa\, m}{x \lg x \lg_2 x}\right] \quad (\varkappa \text{ passend})$$

(b)
$$\mathfrak{F}(x\,n) = \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\lg\left(1+\frac{\lg n}{\lg x}\right)}{\lg_2 x}\right]^{\varkappa(\xi_3)}$$

$$< \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa \lg n}{\lg x \lg_2 x}\right] \quad (\varkappa \text{ passend})$$

$$\text{(c)}\quad \mathfrak{F}(x^p) = \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\lg p}{\lg_2 x}\right]^{\varkappa(\xi_3)}$$
$$< \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa \lg p}{\lg_2 x}\right] \quad (\varkappa \text{ passend})$$
$$\text{(d)}\quad \mathfrak{F}(x^{q(x)}) = \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\lg q(x)}{\lg_2 x}\right]^{\varkappa(\xi_3)}$$
$$< \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa \lg q(x)}{\lg_2 x}\right], \text{ wenn } q(x) \prec \lg x$$
$$< \mathfrak{F}(x)\left[\frac{\lg q(x)}{\lg_2 x}\right]^{\varkappa(\xi_3)}\left(1+\frac{\varkappa \lg_2 x}{\lg q(x)}\right), \text{ wenn } q(x) \succ \lg x.$$

3. Voraussetzung:

$$\mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x \lg x \ldots \lg_\nu x}.$$

Allgemeine Formel:

$$\lg \frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} = \int_x^{x+m} \frac{\varkappa(x)\,dx}{x \lg x \ldots \lg_\nu x} = \varkappa(\xi_1)\,[\lg_{\nu+1}(x+m) - \lg_{\nu+1} x],$$

daraus wie oben:

$$\text{(a)}\quad \mathfrak{F}(x+m) < \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa m}{x \lg x \ldots \lg_\nu x}\right] \quad (\varkappa \text{ passend})$$

$$\text{(b)}\quad \mathfrak{F}(x\,n) < \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa \lg n}{\lg x \lg_2 x \ldots \lg_\nu x}\right] \quad (\varkappa \text{ passend})$$

$$\text{(c)}\quad \mathfrak{F}(x^p) < \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa \lg p}{\lg_2 x \ldots \lg_\nu x}\right] \quad (\varkappa \text{ passend})$$

$$\text{(d)}\quad \mathfrak{F}(x^{q(x)}) < \mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\varkappa \lg q(x)}{\lg_2 x \ldots \lg_\nu x}\right], \text{ wenn } \lg q(x) \prec \lg_2 x \ldots \lg_\nu x.$$

Ähnliche Resultate gelten auch noch, wenn ν eine wachsende Funktion von x ist. — Das Studium dieser letzten Klasse ist besonders interessant; zu ihr gehört die zuerst von du Bois-Reymond konstruierte Funktion, welche langsamer wächst als jeder noch so oft iterierte Logarithmus.

Bisweilen findet sich als eine solche auch angeführt: $\lg_x x$ oder gar: $\lg_{(x^x)} x$ usw. Das sind aber keine positiv wachsenden Funktionen, sondern komplexwertige; man darf $\nu(x)$ in $\lg_{\nu(x)} x$ nur in dem Maße über alle Grenzen wachsen lassen, daß $\nu(x)$ nicht früher einen bestimmten (ganzzahligen) Wert annimmt, bevor nicht x hinreichend groß ist, nämlich so groß, daß $\lg_{\nu(x)} x > K$.[1])

1) Vgl. Pringsheim: Math. Ann. **35** (1890), S. 352. Dagegen z. B. Bortolotti: Atti Soc. Naturalisti Modena (**4**) **3**. (1901).

Da wir das Wachstum einer Funktion statt durch die Beziehung zwischen Ableitung und Funktion auch durch eine daraus hergeleitete Gleichung, wie sie oben abgeleitet sind, definieren können, wäre es bei dieser in Frage stehenden Klasse von langsam wachsenden Funktionen am bequemsten, eine solche Gleichung als Charakteristikum des Wachstums zu benutzen.

Wir können eine wirklich vorhandene, aber in der Analysis noch nicht existierende Funktion definieren, beispielsweise durch:

$$\mathfrak{F}(e^x) = \mathfrak{F}(x) + 1.$$

Daraus ergäbe sich: $\mathfrak{F}(e_m(x)) = \mathfrak{F}(x) + m$; dies zeigt das außerordentlich langsame Wachstum besonders deutlich.

Eine unübersehbare Reihe von solchen Funktionen läßt sich auf analoge Art definieren, doch soll das hier nicht weiter verfolgt werden, da im zweiten Teile von derart langsam wachsenden Funktionen kein Gebrauch gemacht wird; weil dort nicht eine solche Schärfe angestrebt wurde, daß diese Funktionen wesentlich in Betracht kommen. Doch ist das wohl durchführbar, die Hilfsmittel, die in diesem ersten Teile geboten werden, reichen dazu aus.

b. Funktionen mittleren Wachstums.

4. Voraussetzung:

$$\mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)}{x}.$$

Allgemeine Formel:

$$\lg\frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} = \int_x^{x+m}\frac{\varkappa(r)\,\mathrm{d}r}{r} = \varkappa(\xi_1)\int_x^{x+m}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \varkappa(\xi_1)[\lg(x+m) - \lg x] = \varkappa(\xi_1)\lg\left(1+\frac{m}{x}\right).$$

$$\frac{\mathfrak{F}(x+m)}{\mathfrak{F}(x)} = \left(1+\frac{m}{x}\right)^{\varkappa(\xi_1)}$$

(a) $\mathfrak{F}(x+m) < \mathfrak{F}(x)\left(1+\dfrac{\varkappa m}{x}\right)$ ($\varkappa$ passend)

(b) $\mathfrak{F}(xn) < \mathfrak{F}(x)\,n^{\varkappa}$ ($\varkappa$ passend)

(c) $\mathfrak{F}(x^p) < \mathfrak{F}(x)\,x^{(p-1)\varkappa}$ ($\varkappa$ passend).

Dies $\mathfrak{F}(x)$ wächst schon bedeutend schneller als die bisherigen Funktionen.

c. Schnell wachsende Funktionen.

5. Voraussetzung:

$$\mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)\lg\mathfrak{F}(x)}{x}.$$

Allgemeine Formel:

$$\int \frac{\mathfrak{F}'(x)\,\mathrm{d}x}{\mathfrak{F}(x)\lg\mathfrak{F}(x)} = \int \frac{\varkappa(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}[\mathfrak{F}(x)]}{\lg\mathfrak{F}(x)} = \int \frac{\varkappa(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\lg_2 \mathfrak{F}(x) = \int \frac{\varkappa(x)}{x}\,\mathrm{d}x;\ \text{somit:}$$

$$\lg_2 \mathfrak{F}(x+m) - \lg_2 \mathfrak{F}(x) = \int_x^{x+m} \frac{\varkappa(x)\,\mathrm{d}x}{x} = \varkappa(\xi_1)\,[\lg(x+m) - \lg x]$$

$$= \varkappa(\xi_1)\lg\left(1+\frac{m}{x}\right) = \lg\left[\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\varkappa(\xi_1)}\right]$$

$$\lg\mathfrak{F}(x+m) = \lg\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{m}{x}\right]^{\varkappa(\xi_1)}$$

$$\mathfrak{F}(x+m) = \mathfrak{F}(x)^{\left[1+\frac{m}{x}\right]^{\varkappa(\xi_1)}} \quad \text{für alle } m.$$

(a) $\mathfrak{F}(x+m) < \mathfrak{F}(x)^{1+\frac{\varkappa m}{x}}$ für endliche m; $\varkappa$ passend

(b) $\mathfrak{F}(xn) < \mathfrak{F}(x)^{n^{\varkappa}}$, $\varkappa$ passend. [endliche Potenz].

(c) $\mathfrak{F}(x^p) < \mathfrak{F}(x)^{x^{(p-1)\varkappa}}$. [keine endliche Potenz mehr].

6. Voraussetzung:

$$\mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)\lg\mathfrak{F}(x)\lg_2\mathfrak{F}(x)}{x}.$$

Hier wird:

$$\lg_3 \mathfrak{F}(x+m) - \lg_3 \mathfrak{F}(x) = \int_x^{x+m} \frac{\varkappa(x)\,\mathrm{d}x}{x} = \varkappa(\xi_1)\lg\left(1+\frac{m}{x}\right)$$

$$\lg_2 \mathfrak{F}(x+m) = \lg_2 \mathfrak{F}(x)\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\varkappa(\xi_1)}$$

$$\lg\mathfrak{F}(x+m) = \lg\mathfrak{F}(x)^{\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\varkappa(\xi_1)}}$$

(a) $\mathfrak{F}(x+m) < \mathfrak{F}(x)^{\lg\mathfrak{F}(x)^{\frac{\varkappa m}{x}}}$; $\varkappa$ passend, endliche m.

(b) $\lg\mathfrak{F}(xn) = \lg\mathfrak{F}(x)^{n^{\varkappa(\xi_2)}}$ oder

$\mathfrak{F}(xn) < \mathfrak{F}(x)^{\lg\mathfrak{F}(x)^{n^{\varkappa}-1}}$ für endliche n.

(c) $\lg\mathfrak{F}(x^p) = \lg\mathfrak{F}(x)^{x^{(p-1)\varkappa(\xi_3)}}$ oder

$\mathfrak{F}(x^p) < \mathfrak{F}(x)^{\lg\mathfrak{F}(x)^{x^{(p-1)\varkappa}-1}}$ für endliche p.

7. Voraussetzung:

$$\mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{F}(x)\lg\mathfrak{F}(x)\ldots\lg_\nu\mathfrak{F}(x)}{x};\quad \text{auch } \nu = \nu(x).$$

Ebenso; nur unbequem zu schreiben.

Man sieht, wie mit wachsendem ν die Funktion $\mathfrak{F}(x)$ so rasch wächst, daß selbst in nächster Nähe von x keine endliche Potenz von $\mathfrak{F}(x)$ mehr ausreicht; denn schon im Falle der 5. Voraussetzung hat man $\mathfrak{F}(x+\varepsilon) > \mathfrak{F}(x)^p$, wo ε beliebig klein, p beliebig groß. Nur wenn man ε durch eine nach Null konvergierende Funktion ersetzt, erhält man niedrigere Werte. In diesem Falle ergeben sich übrigens die genauesten Resultate durch Übergang zu der entsprechenden inversen Funktion.

Beispiel: Es sei $y = \mathfrak{F}(x)$; $x = \mathfrak{G}(y)$, dann folgt z. B. aus

$$\mathfrak{F}(xn) = \mathfrak{F}(x)\left(1 + \frac{\varkappa \lg n}{\lg x}\right) \text{ bei } \mathfrak{F}'(x) = \frac{\varkappa\mathfrak{F}(x)}{x\lg x}:$$

$$\mathfrak{G}[\mathfrak{F}(xn)] = \mathfrak{G}\left[\mathfrak{F}(x)\left(1 + \frac{\varkappa\lg n}{\lg x}\right)\right], \text{ d. h.}$$

$$xn = \mathfrak{G}\left[\mathfrak{F}(x)\left(1 + \frac{\varkappa\lg n}{\lg x}\right)\right],$$

jetzt die obigen Bezeichnungen eingeführt:

$$\mathfrak{G}(y)\,n = \mathfrak{G}\left[y\left(1 + \varkappa\frac{\lg n}{\lg\mathfrak{G}(y)}\right)\right],$$

$$\text{also: } \mathfrak{G}\left(y + \frac{\varkappa y \lg n}{\lg\mathfrak{G}(y)}\right) = n\,\mathfrak{G}(y);$$

und ähnliche andre.

Auf gleiche Weise ergeben sich dann auch die oben mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung abgeleiteten Resultate, und zwar genauer.

§ 8. Das umgekehrte Problem: Bestimmung der zu gegebenen Funktionswerten gehörigen Argumentwerte.

Statt nach dem Funktionswerte für einen in bestimmter Entfernung vom Ausgangspunkte x liegenden Argumentwert, kann man fragen nach dem Argumentwert, für den die Funktion einen gegebenen Wert annimmt. Diese Frage wird am einfachsten durch Betrachtung der inversen Funktion gelöst.

Da wir im zweiten Teil, wo uns diese Frage mehrfach begegnen wird, die jedesmalige Lösung besonders herleiten, so sei im folgenden

keine systematische Zusammenstellung der möglichen Aufgaben und Lösungen gegeben, sondern es werde nur durch beliebig herausgegriffene Beispiele eine kurze Orientierung über das einzuschlagende Verfahren gegeben.

1. Beispiel. Es sei (bei gegebenem Wachstum von $\mathfrak{F}$) y zu bestimmen in: $\mathfrak{F}(y) = m\,\mathfrak{F}(x)$, wo m endlich.

Durch Inversion findet man:

$$y = \mathfrak{G}\,[m\,\mathfrak{F}(x)], \text{ d. h. wenn } \mathfrak{F}(x) = x_1;\ x = \mathfrak{G}(x_1):$$
$$y = \mathfrak{G}\,(m x_1).$$

Genügt z. B. $\mathfrak{F}$ der Bedingung: $\mathfrak{F}'(x) = \dfrac{\varkappa\,\mathfrak{F}(x)}{x \lg x}$, dann genügt offenbar $\mathfrak{G}(x_1)$ der Bedingung: $\mathfrak{G}'(x_1) = \dfrac{\mathfrak{G}(x_1) \lg \mathfrak{G}(x_1)}{\varkappa x_1}$.

Im Fall der letzten Gleichung war aber:

$$\mathfrak{G}(m x_1) = \mathfrak{G}(x_1)^{m^{\frac{1}{\varkappa}}},$$

also:
$$y = \mathfrak{G}(x_1)^{m^{\frac{1}{\varkappa}}} = x^{m^{\frac{1}{\varkappa}}};$$

folglich:
$$\mathfrak{F}\left(x^{m^{\frac{1}{\varkappa}}}\right) = m\,\mathfrak{F}(x).$$

2. Beispiel. Es sei y zu bestimmen in $\mathfrak{F}(y) = \mathfrak{F}(x)\left[1 + \dfrac{\varkappa}{\lg_2 x}\right]$, wo $\mathfrak{F}'(x) = \dfrac{\varkappa\,\mathfrak{F}(x)}{x \lg x}$.

Durch Inversion: $\mathfrak{G}\,[\mathfrak{F}(y)] = \mathfrak{G}\left(\mathfrak{F}(x)\left[1 + \dfrac{\varkappa}{\lg_2 x}\right]\right)$

$$y = \mathfrak{G}\left(x_1\left[1 + \frac{\varkappa}{\lg_2 \mathfrak{G}(x_1)}\right]\right).$$

Da nun $\mathfrak{G}'(x_1) = \dfrac{\mathfrak{G}(x_1) \lg \mathfrak{G}(x_1)}{\varkappa x_1}$, so folgt nach früherem:

$$\mathfrak{G}\left(x_1 + \frac{\varkappa x_1}{\lg_2 \mathfrak{G}(x_1)}\right) = \mathfrak{G}(x_1)^{\left[1 + \frac{\varkappa}{\lg_2 \mathfrak{G}(x_1)}\right]^{\frac{1}{\varkappa}}},$$

also:
$$y = x^{\left[1 + \frac{\varkappa}{\lg_2 x}\right]^{\frac{1}{\varkappa}}},$$

d. h.
$$\mathfrak{F}\left(x^{\left[1 + \frac{\varkappa}{\lg_2 x}\right]^{\frac{1}{\varkappa}}}\right) = \mathfrak{F}(x)\left(1 + \frac{\varkappa}{\lg_2 x}\right).$$

3. Beispiel. Es sei y zu bestimmen in:

$$\mathfrak{F}(y) = \mathfrak{F}(x)\left(1 + \frac{\lg \mathfrak{F}(x)}{\lg x}\right)^{\varkappa}$$

bei gleicher Voraussetzung über das Wachstum von $\mathfrak{F}(x)$.

Durch Inversion: $\mathfrak{G}[\mathfrak{F}(y)] = \mathfrak{G}\left(\mathfrak{F}(x)\left[1+\frac{\lg \mathfrak{F}(x)}{\lg x}\right]^{\varkappa}\right)$

$$y = \mathfrak{G}\left(x_1\left[1+\frac{\lg x_1}{\lg \mathfrak{G}(x_1)}\right]^{\varkappa}\right).$$

Da nun wieder: $\mathfrak{G}'(x) = \frac{\mathfrak{G}(x)\lg \mathfrak{G}(x)}{\varkappa x}$, so folgt:

$$\mathfrak{G}\left(x_1\left[1+\frac{\lg x_1}{\lg \mathfrak{G}(x_1)}\right]^{\varkappa}\right) = \mathfrak{G}(x_1)^{\left[1+\frac{\lg x_1}{\lg \mathfrak{G}(x_1)}\right]}$$

$$y = x^{1+\frac{\lg \mathfrak{F}(x)}{\lg x}} = x e^{\lg \mathfrak{F}(x)} = x\,\mathfrak{F}(x),$$

d. h. $\mathfrak{F}[x\,\mathfrak{F}(x)] = \mathfrak{F}(x)\left(1+\frac{\lg \mathfrak{F}(x)}{\lg x}\right)^{\varkappa}$,

was in der Tat der Fall ist.

§ 9. Die Konstruktion von Vergleichsfunktionen.

Wir haben monoton mit der Veränderlichen ins Unendliche wachsende positive Funktionen mit gewissen Eigenschaften als Vergleichsfunktionen *definiert*. Die Wahl der Definition, die an und für sich vollständig unsrer Willkür überlassen ist, rechtfertigt sich durch den Erfolg, durch das, was die Definition uns leistet. Ein Kriterium hierfür ist der zweite Teil der Arbeit.

Es bleibt nun noch die wichtige Frage: wie konstruiert man zu einer beliebig gegebenen monotonen Funktion die Vergleichsfunktion?

Das hängt von dem jeweilig vorliegenden Fall ab.

Im allgemeinen werden die gegebenen Funktionen gewisse Schwankungen im Wachstum aufweisen. Je nach der Größe und Häufigkeit derselben weichen sie in ihrem ganzen Verlaufe mehr oder minder von Vergleichsfunktionen ab, darum ist auch bald ein engeres, bald ein nicht so enges Anschließen der Vergleichsfunktion an die gegebene möglich. Man kann daher nicht Ungleichungen, welche die Zugehörigkeit einer Vergleichsfunktion zu einer gegebenen definieren sollen, gleichförmig für *alle* wachsenden Funktionen aufstellen[1]; vielmehr muß man eine als „Grad der Annäherung“ zu be-

1) Auch spricht dagegen die Verschiedenheit des Wachstums der regelmäßig wachsenden Funktionen überhaupt. Es sei z. B. $F(x)^{1-\varepsilon} < \mathfrak{G}(x) < F(x)^{1+\varepsilon}$; sollen die entsprechenden inversen Funktionen, wie naheliegt, auch „zusammengehören“, so wäre bei rasch wachsendem $\mathfrak{G}(x)$ eine gleiche Bedingung zu ungenau, bei genügend rasch wachsendem $\mathfrak{G}(x)$ sogar die folgende: $(1-\varepsilon)f(x) < g(x) < (1+\varepsilon)f(x)$ usw.

zeichnende Funktion $\alpha(x)$ einführen, die von den jeweilig vorliegenden Verhältnissen abhängt, also stets als gegeben zu denken ist, und folgende Ungleichungen erfüllt:

$$F(x) < \mathfrak{F}(x)\,\alpha(x);\quad F(x) > \mathfrak{F}(x)\,[\alpha(x)]^{-1},$$

die eine für *alle* hinreichend großen x, die andre mindestens für *unendlich viele* beliebig große x.

Statt zu einer gegebenen Funktion als Ganzes betrachtet die Vergleichsfunktion zu konstruieren, ist es bei stärkeren Wachstumsschwankungen vorteilhaft, eine Art verallgemeinerter Vergleichsfunktion nämlich eine aus Stücken von Vergleichsfunktionen zusammengesetzte Funktion heranzuziehen. Dann kann ein viel engerer Anschluß erzielt werden.

Für die Theorie der ganzen transzendenten Funktionen kommen als wachsende positive Funktionen vor allem in Betracht:

a) Das Maximum des absoluten Betrages der Funktion auf dem Kreise mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt, bezw. der Logarithmus davon: $M(\varrho)$; $V(\varrho) = \lg M(\varrho)$.

b) Die der Größe nach geordneten absoluten Beträge der Nullstellen als Funktionen des Stellenzeigers: $\gamma_n = |c_n|$.

c) Die absoluten Beträge der Koeffizienten der Reihenentwicklung als Funktionen des Stellenzeigers: $\alpha_n = |a_n|$.

d) Die Zahl n der Nullstellen im Kreise mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt als Funktion von ϱ.

Ist $f(x)$ von der Ordnung Null, so wächst $V(\varrho) = \lg M(\varrho)$ langsamer als jede noch so niedrige Potenz von ϱ; die Vergleichsfunktion zu dem ganzen Zuge von $V(\varrho)$ genügt dann der Bedingung:

$$\mathfrak{V}'(x) = \frac{\varkappa(x)\,\mathfrak{V}(x)}{x \lg x},\ \text{wo}\ \varkappa(x) > 1 + \frac{1}{[\lg_2 x]^{1+\varepsilon}}.$$

Für die Nullstellen im ganzen können als Vergleichsfunktionen $\mathfrak{c}(h)$ angenommen werden:

$$\mathfrak{c}'(h) = \frac{\varkappa(h)\,\mathfrak{c}(h) \lg \mathfrak{c}(h)}{h}$$

. . . . . .

$$\mathfrak{c}'(h) = \frac{\varkappa(h)\,\mathfrak{c}(h) \lg \mathfrak{c}(h) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h)}{h},$$

wo r auch mit h wachsen kann, jedoch nicht so schnell, daß

$$\lg_r \mathfrak{c}(h) < 0.$$

Zweiter Teil.

Allgemeine Sätze über Wachstum und Wertverteilung.

I. Folgerungen aus der Stärke des Unendlichwerdens der Funktion.

§ 1. Eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen.

Aus der Stärke des Unendlichwerdens einer ganzen transzendenten Funktion läßt sich eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen in einem hinreichend großen Kreise bestimmen nach dem folgenden Satze[1]): Sei n die Anzahl der Nullstellen, deren absoluter Betrag nicht größer ist als eine gegebene Größe τ, dann gilt:

$$n \leqq \frac{\lg M(\vartheta\tau)}{\lg(\vartheta-1)}; \text{ wo } \vartheta > 2.$$

Dieser Satz gilt für alle ganzen transzendenten Funktionen, die im Anfangspunkte, wie wir der Einfachheit halber immer voraussetzen wollen, den Wert 1 annehmen. Aber er liefert für die ganzen Funktionen nullter und unendlicher Ordnung viel zu hohe Schranken: einerseits wächst bei den Funktionen unendlicher Ordnung $M(\varrho)$ sehr rasch, so daß $M(\vartheta\tau)$ sehr viel größer ist als $M(\tau)$, selbst wenn $\vartheta = 2 + \varepsilon$, wo ε beliebig klein, aber fest. Daher wird trotz der dadurch hervorgerufenen Verkleinerung des Nenners die Schranke bedeutend herabgedrückt, wenn man $\vartheta = 2 + \varepsilon(\tau)$ setzt, wo $\varepsilon(\tau)$ eine passend gewählte, d. h. eine nach der jeweiligen Stärke des Wachstums von $M(\varrho)$ zu bestimmende mit $\tau = \infty$ gegen Null konvergierende Funktion ist. — Andrerseits wächst bei den Funktionen nullter Ordnung $M(\varrho)$ außerordentlich langsam, so daß $M(\vartheta\tau)$ auch bei sehr großem ϑ nur sehr wenig größer ist als $M(\tau)$; hier wird also ϑ passend groß, ja sogar als unendlich werdende Funktion gewählt werden müssen,

1) Vgl. Vivanti-Gutzmer, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Art. 244.

damit durch das $\lg(\vartheta-1)$ im Nenner die Schranke wesentlich herabgemindert wird.

Der obige Satz gibt demnach nur für eine gewisse mittlere Zone in dem ganzen Gebiete der ganzen Funktionen genügend genaue, d. i. nicht zu hohe obere Schranken; für sehr schnell und sehr langsam wachsende Funktionen, auch für solche endlicher Ordnung, versagt er in der vorliegenden Form, aber er kann wesentlich verschärft werden, indem man durch Differenzieren das ϑ aufsucht, das die rechte Seite zu einem Minimum macht. Dabei auftretende Schwierigkeiten vermeidet das folgende Verfahren.

Hilfssatz: Nach der Produktentwicklung von Weierstraß ist:

$$f(x) = e^{g(x)} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{\varkappa=1}^{r_h} \frac{x^\varkappa}{\varkappa c_h^\varkappa}}.$$

Es sei nun ω eine primitive p^{te} Einheitswurzel ($p > r_h$), dann ist

$$\text{(a)} \quad f(x) f(\omega x) f(\omega^2 x) \ldots . f(\omega^{p-1} x) = c \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y}{c_h^p}\right); \text{ wo } y = x^p.^{1})$$
$$= f_1(y)$$

Bezeichnen wir mit $M(\varrho)$ das Maximum des absoluten Betrages von $f(x)$ auf dem Kreise mit dem Radius ϱ, so ist $M(\varrho)$ auch das entsprechende Maximum von $|f(\omega x)|, \ldots, |f(\omega^{p-1} x)|$. Ist endlich $M_1(r)$ das Maximum des absoluten Betrages der in der letzten Gleichung rechts stehenden Funktion von $y = x^p$ für $|y| = r$, so folgt:

$$[M(\varrho)]^p = M_1(\varrho^p) \text{ oder:}$$
$$\text{(a')} \quad \boldsymbol{p \lg M(\varrho) = \lg M_1(\varrho^p)},$$

wo bei unendlicher Ordnung p von ϱ abhängen kann, da $p > r_h$.

Bei Funktionen der Ordnung Null fallen der äußere Exponentialfaktor und die Exponentialgrößen der Primfaktoren fort; man hat einfach:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right).$$

Dann gilt das obige erst recht, wir wollen es aber in der Form schreiben:

$$\text{(b)} \quad f_1(x^{\frac{1}{p}}) f_1(\omega x^{\frac{1}{p}}) \ldots . f_1(\omega^{p-1} x^{\frac{1}{p}}) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) = f(x);$$

entsprechend: $$\left[M_1(\varrho^{\frac{1}{p}})\right]^p = M(\varrho)$$

oder: $$\underline{\text{(b')} \quad \boldsymbol{p \lg M_1(\varrho^{\frac{1}{p}}) = \lg M(\varrho).}}$$

1) Vivanti-Gutzmer. Art. 267.

Der Satz von der Anzahl der Nullstellen werde zunächst auf $f_1(y) = f_1(x^p)$ von (a) angewandt:

$$n \leqq \frac{\lg M_1(\vartheta \tau^p)}{\lg(\vartheta - 1)}$$

oder nach (a′)

$$(1) \quad \boldsymbol{n \leqq \frac{p \lg M\left(\vartheta^{\frac{1}{p}} \tau\right)}{\lg(\vartheta - 1)}}.$$

Diese Formel ist brauchbar für sehr rasch wachsende Funktionen, es ist dann p bei gegebenem τ je nach der speziellen Schnelligkeit des Wachstums von $M(\varrho)$ passend groß zu wählen.

Gewissermaßen das Negativ zu diesem Verdichtungsverfahren muß man bei langsam wachsenden Funktionen anwenden. Demgemäß geht man aus von (b) und (b′). Der Satz von der Anzahl der Nullstellen gibt für $f_1(x)$:

$$n \leqq \frac{\lg M_1\left(\vartheta \tau^{\frac{1}{p}}\right)}{\lg(\vartheta - 1)},$$

also nach (b′)

$$(2) \quad \boldsymbol{n \leqq \frac{\lg M(\vartheta\ \tau)}{p \lg(\vartheta - 1)}}.$$

Auch hier ist ein passend großes p einzusetzen. Wir erhalten die günstigste Größe von p, wenn wir die rechte Seite, d. h. $\frac{\lg M(\vartheta^p \tau)}{p}$ nach p differenzieren und die Ableitung gleich Null setzen:

$$p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, p} \lg M(\vartheta^p \tau) = \lg M(\vartheta^p \tau)$$

$$p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\vartheta^p \tau)} \lg M(\vartheta^p \tau)\, \vartheta^p \tau \lg \vartheta = \lg M(\vartheta^p \tau).$$

Das Wachstum einer monotonen positiven Funktion charakterisieren wir nun durch eine Beziehung zwischen Ableitung und Funktion; gegeben ist hier das Wachstum von $\lg M(\varrho)$, damit haben wir also über die Ableitung von $\lg M(\varrho) = V(\varrho)$ bestimmte Angaben.

(α) Nehmen wir zunächst an, $V(\varrho)$ sei selbst eine regelmäßige Vergleichsfunktion im Sinne des 1. Teiles: $\mathfrak{V}(\varrho)$[1]; dann haben wir:

$$\mathfrak{V}'(\varrho) = \frac{\varkappa(\varrho)\, \mathfrak{V}(\varrho)}{\varrho \lg \varrho}; \quad \varkappa(\varrho) > 1 \text{ für alle } \varrho.$$

---

1) Etwa von $\varrho \geqq R$ ab; dann ist am besten $\tau \geqq R$ zu wählen; notwendig ist: $\tau \geqq R^{\frac{\varkappa(R)-1}{\varkappa(R)}}$.

Dies oben eingesetzt, gibt:

$$p\frac{\varkappa(\vartheta^p\tau)\,\mathfrak{V}(\vartheta^p\tau)}{\vartheta^p\tau\lg(\vartheta^p\tau)}\vartheta^p\tau\lg\vartheta=\mathfrak{V}(\vartheta^p\tau)$$

$$p\,\varkappa(\vartheta^p\tau)\lg\vartheta=p\lg\vartheta+\lg\tau$$

$$p\,[\varkappa(\vartheta^p\tau)-1]=\frac{\lg\tau}{\lg\vartheta}.$$

Ohne großen Nachteil können wir bei dem hier in Betracht kommenden Genauigkeitsgrad $\varkappa(\vartheta^p\tau)$ ersetzen durch $\varkappa(\tau)$ und erhalten:

$$p\gtrless\frac{\lg\tau}{[\varkappa(\tau)-1]\lg\vartheta},\text{ je nachdem }\varkappa(\vartheta^p\tau)\lesseqgtr\varkappa(\tau).$$

NB. Der Unterschied zwischen $\varkappa(\vartheta^p\tau)$ und $\varkappa(\tau)$, der im Höchstfalle sicher noch $<\frac{A}{(\lg\tau)^{1+\varepsilon}}$, wo A endlich, läßt sich durch Festsetzung über $\varkappa$ (S. 15) regeln.

Setzen wir ein, so erhalten wir:

$$n<\frac{[\varkappa(\tau)-1]\lg\vartheta\,\mathfrak{V}\left(\vartheta^{\frac{\lg\tau}{(\varkappa-1)\lg\vartheta}}\tau\right)}{\lg(\vartheta-1)\lg\tau}$$

$$n<\frac{[\varkappa(\tau)-1]\lg\vartheta\,\mathfrak{V}\left(\tau^{\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)-1}}\right)}{\lg(\vartheta-1)\lg\tau}.$$

Hier kann $\mathfrak{V}\left(\tau^{\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)-1}}\right)$ nach dem 1. Teile abgeschätzt werden, vgl. S. 21d.

$$\mathfrak{V}\left(\tau^{\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)-1}}\right)=\mathfrak{V}(\tau)\left[\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)-1}\right]^{\varkappa(\xi)},\text{ wo: }\tau<\xi<\tau^{\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)-1}},$$

$$\text{also: }\quad n<\frac{[\varkappa(\tau)-1]\lg\vartheta\,\mathfrak{V}(\tau)\,\varkappa(\tau)^{\varkappa(\xi)}}{\lg(\vartheta-1)[\varkappa(\tau)-1]^{\varkappa(\xi)}\lg\tau}$$

ϑ können wir beliebig wählen, am günstigsten möglichst groß, da dann der Quotient $\lg\vartheta:\lg(\vartheta-1)$ der 1 am nächsten ist; man kann dann setzen: $\frac{\lg\vartheta}{\lg(\vartheta-1)}\leqq 1+\frac{\varepsilon}{\vartheta\lg\vartheta}$; $\varepsilon>0$, beliebig klein;

$$\underline{n<\left(1+\frac{\varepsilon}{\vartheta\lg\vartheta}\right)\frac{[\varkappa(\tau)]^{\varkappa(\xi)}}{[\varkappa(\tau)-1]^{\varkappa(\xi)-1}}\frac{\mathfrak{V}(\tau)}{\lg\tau}};$$

$\varepsilon>0$ beliebig klein; ϑ beliebig groß.

Definieren wir nun: eine ganze transzendente Funktion heißt von *regelmäßigem Wachstum*, falls $\lg M(\varrho)$ selbst als „Vergleichsfunktion" angesehen werden kann, dann können wir den Satz aufstellen:

Ist $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion nullter Ordnung von regelmäßigem Wachstum, so ist die Anzahl n der Nullstellen, deren absoluter Betrag nicht größer ist als eine gegebene Größe τ, höch-

stens gleich: $\dfrac{[\varkappa(\tau)]^{\varkappa(\xi)}}{[\varkappa(\tau)-1]^{\varkappa(\xi)-1}}\dfrac{\lg M(\tau)}{\lg\tau}$, *wo:* $\varkappa(\tau)=\dfrac{\tau\lg\tau\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\lg M(\tau)}{\lg M(\tau)}$ *und* $\tau<\xi<\tau^{\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)-1}}$. [$\tau$ den Umständen nach groß genug zu wählen.]

(β) Nehmen wir nun zweitens an, $V(\varrho)=\lg M(\varrho)$ sei keine regelmäßig wachsende Vergleichsfunktion, so konstruieren wir zu $V(\varrho)$ eine sich möglichst eng anschließende Vergleichsfunktion $\mathfrak{V}(\varrho)$ z. B. derart, daß:

(1) $V(\varrho)\leqq\mathfrak{V}(\varrho)$ für alle hinlänglich großen $\varrho:\varrho>R$.

(2) $V(\varrho)>\mathfrak{V}(\varrho)\,[\alpha(\varrho)]^{-1}$ für gewisse ϱ, unter denen auch beliebig große.

$\alpha(\varrho)$ ist der „Grad der Annäherung“; er *muß* natürlich stets kleiner als $|\mathfrak{V}(\varrho)|^{\varepsilon}$, wo ε beliebig klein, gewählt werden. In der Regel wird man sich mit dieser groben Annäherung nicht begnügen, sondern z. B. wählen: $\alpha(\varrho)$ gleich dem beliebig oft iterierten Logarithmus von $\mathfrak{V}(\varrho)$ oder gleich einer noch langsamer ins Unendliche wachsenden Funktion von ϱ oder gleich einer endlich bleibenden Funktion >1, die auch $<1+\varepsilon$ sein kann, wo ε beliebig klein usw. Ein besonderer Fall ist es, wenn auch (2) für alle hinlänglich großen ϱ gilt. Wie weit man dann in der Herabminderung von $\alpha(\varrho)$ gehen kann, hängt natürlich ganz davon ab, welcher Art die Unregelmäßigkeiten von $M(\varrho)$ sind. Sind diese schwach, so kann man $\alpha(\varrho)$ kleiner wählen, als wenn starke Schwankungen im Wachstum vorliegen. Das kleinstmöglich gewählte $\alpha(\varrho)$ gibt damit ein Maß der Unregelmäßigkeit. —

In unserm Falle, wo es nur auf eine obere Schranke von $V(\varrho)$ ankommt, brauchen wir nur $\mathfrak{V}(\varrho)$ anstelle von $V(\varrho)$ zu setzen, und das obige Resultat gilt auch hier.

Man kann die Vergleichsfunktion auch so konstruieren, daß (1′) $V(\varrho)\geqq\mathfrak{V}(\varrho)$ für alle hinlänglich großen ϱ, (2′) $V(\varrho)<\mathfrak{V}(\varrho)\,\alpha(\varrho)$ für gewisse ϱ, unter denen auch beliebig große. Für die ϱ der letzten Ungleichung kann dann $V(\varrho)$ durch $\mathfrak{V}(\varrho)\,\alpha(\varrho)=\mathfrak{V}_1(\varrho)$ ersetzt werden, wenn dies eine Vergleichsfunktion ist.

Anmerkung. Für alle g. tr. Funktionen der Ordnung Null genügt die (wie oben konstruierte) Vergleichsfunktion zu $\lg M(\varrho)$ einer Gleichung: $\mathfrak{V}'(\varrho)=\dfrac{\varkappa(\varrho)\,\mathfrak{V}(\varrho)}{\varrho\lg\varrho}$; wo nur $\varkappa(\varrho)$ das die einzelnen Funktionen Unterscheidende ist; es sei daher der Ausdruck gestattet: eine *g. tr. Funktion nullter Ordnung der Klasse* $\varkappa(\varrho)$.

Zur „Klasse $\varkappa(\varrho)$“ gehören außer der entsprechenden regelmäßig wachsenden Funktion noch unendlich viele unregelmäßig wachsende

Funktionen, denn die Unregelmäßigkeiten sind einmal an und für sich beliebig, dann können sie sich auch auf verschiedene Intervalle erstrecken.

Mit dieser Bezeichnung haben wir den Satz:

Die Anzahl der Nullstellen vom absoluten Betrage $\leqq \tau$ *einer g. tr. Funktion nullter Ordnung der Klasse* $\varkappa(\varrho)$ *ist höchstens gleich*

$$\frac{[\varkappa(\tau)]^{\varkappa(\xi)}}{[\varkappa(\tau)-1]^{\varkappa(\xi)-1}} \frac{\mathfrak{V}(\tau)}{\lg \tau}, \quad wo \ \tau < \xi < \tau^{\frac{\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)-1}}.$$

Für gewisse unendlich viele τ ist nach (2) vor. Seite:

$$\mathfrak{V}(\tau) < \alpha(\tau)\, V(\tau) = \alpha(\tau) \lg M(\tau);$$

eine weiter gehende Aussage ist unmöglich, wenn nicht gerade der spezielle Fall vorliegt, daß beide Ungleichungen für alle hinlänglich großen ϱ gelten.[1]) Ähnliches tritt ein bei der 2. Art der Konstruktion von Vergleichsfunktionen.

(γ) Drittens wollen wir $V(\varrho)$ wiederum als „unregelmäßig wachsend" annehmen, aber wir konstruieren nicht eine *gewissermaßen den Durchschnitt repräsentierende* Vergleichsfunktion[2]) wie oben, sondern denken uns $V(\varrho)$ in verschiedenen Intervallen durch verschiedene Vergleichsfunktionen in abwechselnder Folge dargestellt.

Z. B. sei $V(\varrho)$ in den Intervallen $\varrho_1 \,..\, \varrho_2$; $\varrho_3 \,..\, \varrho_4$; .....; $\varrho_\nu \,..\, \varrho_{\nu+1}$; .... am treffendsten zu vergleichen mit $\mathfrak{V}(\varrho)$, etwa mit $\mathfrak{V}(\varrho)$ zu identifizieren, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen. Wir wollen alle diese Werte, für die das der Fall ist, bezeichnen mit r. Die oben gebrauchte Formel wird hier zu:

$$n \leqq \frac{\lg M(\vartheta\tau)}{\lg(\vartheta-1)} = \frac{\mathfrak{V}(\vartheta\tau)}{\lg(\vartheta-1)}, \quad \text{wo} \ \ \vartheta\tau = r.$$

---

1) Dann könnte man von *halbregelmäßigem* Wachstum sprechen; das ist aber offenbar ein relativer, von dem gewählten $\alpha(\varrho)$ abhängiger Begriff: eine Funktion, die bei einem gewissen $\alpha_1(\varrho)$ „halbregelmäßig" wächst, braucht es bei einem infinitär kleineren $\alpha_2(\varrho)$ nicht zu tun. Man muß also immer hinzusetzen, in bezug auf welches $\alpha(\varrho)$ „Halbregelmäßigkeit" besteht. Mit $\alpha(\varrho) < [\mathfrak{V}(\varrho)]^\varepsilon$, vgl. S. 33 oben, schließen die halbregelmäßigen Funktionen ab. Die Funktionen mit noch größeren Unregelmäßigkeiten als diese letzten, sind unregelmäßigen Wachstums im *eigentlichen* Sinn.

Die bisher so genannten Funktionen regelmäßigen Wachstums (Borel, Lindelöf) sind halbregelmäßig in unserem Sinne.

2) Diese kann sowohl vollständig oberhalb als auch vollständig unterhalb des Kurvenzuges von $V(\varrho)$ liegen: vgl. die beiden obigen Konstruktionen.

Das Verschärfungsverfahren können wir auch noch anwenden; nur muß $\vartheta^p \tau$ gleich einem r sein; die Bedingungsgleichung für das p, das die rechte Seite zu einem Minimum macht, war:

$$p\,\varkappa(\vartheta^p\tau)\lg\vartheta = \lg(\vartheta^p\tau); \quad (\textit{hier nur angenähert})$$

also: $$\varkappa(r)[\lg r - \lg\tau] = \lg r$$

$$\lg\tau = \lg r\,\frac{\varkappa(r)-1}{\varkappa(r)} \quad \text{oder} \quad \tau = r^{\frac{\varkappa(r)-1}{\varkappa(r)}};$$

d. h. wir können die gleiche Formel für n gebrauchen wie oben, wenn wir die Wahl des τ passend beschränken, indem wir nehmen: $\tau\,(=)\,r^{\frac{\varkappa(r)-1}{\varkappa(r)}}$, wo r ein beliebiger Wert von ϱ in den Intervallen $\varrho_1 .. \varrho_2;\ \varrho_3 .. \varrho_4;\ \ldots$ (Hier kommt es nur darauf an, daß eine derartige Gleichung für τ *möglich* ist; in Wirklichkeit ist die eben erhaltene nur dann *genügend* genau, wenn die $\varkappa$ (s. u.) sich nicht zu sehr voneinander unterscheiden.)

Ist die Gesamtheit der Vergleichsfunktionen, in die $V(\varrho)$ im angegebenen Sinne aufgelöst werden kann, nebst den entsprechenden Intervallen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{V}_1 \ : \varrho_1^{(1)} .. \varrho_2^{(1)};\ \varrho_3^{(1)} .. \varrho_4^{(1)};\ \ldots. \quad (r_1)\\
&\mathfrak{V}_2 \ : \varrho_1^{(2)} .. \varrho_2^{(2)};\ \varrho_3^{(2)} .. \varrho_4^{(2)};\ \ldots. \quad (r_2)\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathfrak{V}_\nu \ : \varrho_1^{(\nu)} .. \varrho_2^{(\nu)};\ \varrho_3^{(\nu)} .. \varrho_4^{(\nu)};\ \ldots. \quad (r_\nu), \text{ so haben wir:}
\end{aligned}$$

$$n < \frac{[\varkappa_1(\tau)]^{\varkappa_1(\xi')}}{[\varkappa_1(\tau)-1]^{\varkappa_1(\xi')-1}}\,\frac{\lg M(\tau)}{\lg\tau} \text{ für die } \tau, \text{ welche } (=)\, r_1^{\frac{\varkappa_1(r_1)-1}{\varkappa_1(r_1)}}$$

$$n < \frac{[\varkappa_2(\tau)]^{\varkappa_2(\xi'')}}{[\varkappa_2(\tau)-1]^{\varkappa_2(\xi'')-1}}\,\frac{\lg M(\tau)}{\lg\tau} \text{ für die } \tau, \text{ welche } (=)\, r_2^{\frac{\varkappa_2(r_2)-1}{\varkappa_2(r_2)}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n < \frac{[\varkappa_\nu(\tau)]^{\varkappa_\nu(\xi^{(\nu)})}}{[\varkappa_\nu(\tau)-1]^{\varkappa_\nu(\xi^{(\nu)})-1}}\,\frac{\lg M(\tau)}{\lg\tau} \text{ für die } \tau, \text{ welche } (=)\, r_\nu^{\frac{\varkappa_\nu(r_\nu)-1}{\varkappa_\nu(r_\nu)}}.$$

Demnach:

Die oben abgeleitete Formel für die obere Schranke der Zahl der Nullstellen, deren absoluter Betrag $\leqq \tau$, gilt auch noch, wenn $\lg M(\varrho)$ nur in gewissen Intervallen einer bestimmten Vergleichsfunktion gleichgesetzt werden kann; nur sind für τ passende Größen zu nehmen.

Wir hatten aus der oberen Grenze des Wachstums eine obere Grenze für die Anzahl der Nullstellen erschlossen; beinahe dieselbe Aufgabe ist es, eine untere Grenze für den Absolutwert der n^{ten} Nullstelle abzuleiten.

§ 2. Eine untere Schranke für den Absolutwert der n^{ten} Nullstelle.

Man erhält nämlich eine derartige, wenn auch nicht genügend genaue Formel durch einfache Inversion der bisher abgeleiteten; etwa auf folgende Weise:

Es sei $\varkappa(\varrho)$ der Einfachheit halber eine Konstante; dann erhalten wir aus

$$n \leqq \frac{\varkappa^{\varkappa}}{(\varkappa-1)^{\varkappa-1}} \frac{\mathfrak{V}(\tau)}{\lg \tau} \quad \text{oder:} \quad \frac{n}{A} \leqq \frac{\mathfrak{V}(\tau)}{\lg \tau},$$

wenn $\mathfrak{W}$ die inverse Funktion zu $\frac{\mathfrak{V}(\tau)}{\lg \tau}$ ist:

$$\mathfrak{W}\left(\frac{n}{A}\right) \leqq \mathfrak{W}\left(\frac{\mathfrak{V}(\tau)}{\lg \tau}\right),$$

$$\text{d. h. } \mathfrak{W}\left(\frac{n}{A}\right) \leqq \tau; \text{ also wenn } \gamma_n = \tau:$$

$$\gamma_n \geqq \mathfrak{W}\left[\frac{(\varkappa-1)^{\varkappa-1}}{\varkappa^{\varkappa}} n\right].$$

Diese Ungleichung gilt nur, wenn das τ so günstig gewählt war, daß auf dem Kreise mit dem Radius τ gerade eine Nullstelle γ_n von $f(x)$ liegt; dann ist sie auch scharf genug. Wenn τ aber zwischen γ_n und γ_{n+1} liegt, muß man schreiben:

$$\gamma_{n+1} > \mathfrak{W}\left[\frac{(\varkappa-1)^{\varkappa-1}}{\varkappa^{\varkappa}} n\right].$$

Diese Ungleichung ist darum viel zu grob, weil bei den Funktionen der Ordnung Null die Nullstellen sehr weit auseinander liegen und γ_{n+1} deshalb viel größer als τ sein kann.

Genauere Ergebnisse erhält man durch direkte Ableitung einer unteren Schranke für γ_n.

Aus dem Satze von Jensen[1]):

$$\mathfrak{M} \lg |f(\varrho)| = \lg |f_1(0)| + \lg \frac{\varrho^{m+q}}{|c_1|\,|c_2| \ldots |c_q|},$$

wo $\mathfrak{M}$ den Mittelwert bezeichnet, folgt, wenn die Funktion im Anfangspunkt den Wert 1 annimmt:

$$M(\varrho) \geqq \frac{\varrho^n}{|c_1\, c_2 \ldots c_n|};$$

eine Formel, die für jeden Wert von ϱ und n gültig ist.

1) Vgl. Vivanti-Gutzmer, Art. 243 und Kraft, Diss. S. 24f.

Da die Nullstellen $c_1, c_2 \ldots$ der absoluten Größe nach geordnet sind, kann man hier $|c_1 c_2 \ldots c_n|$ ersetzen durch den größeren Ausdruck $|c_n|^n = \gamma_n^n$:

$$(1) \quad \boldsymbol{M}(\varrho) > \frac{\varrho^n}{\boldsymbol{\gamma}_n^n}$$

oder:

$$(2) \quad \underline{\boldsymbol{\gamma}_n > \varrho\, \boldsymbol{M}(\varrho)^{-\frac{1}{n}}}$$

Am günstigsten wird diese Ungleichung, die ja für alle ϱ und n gilt, wenn man das ϱ bestimmt, das die rechte Seite zu einem Maximum macht:

$$n = \varrho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho} \lg M(\varrho).$$

Der Ausdruck rechts ist nun bekanntlich (für jede ganze Funktion) eine monoton wachsende Funktion. Die Umkehrung derselben ist daher eindeutig und gibt wieder eine monoton wachsende Funktion.

I. Sie sei, wenn wir $f(x)$ als regelmäßig wachsend betrachten, d. h. $\lg M(\varrho) = V(\varrho)$ mit $\mathfrak{V}(\varrho)$ identifizieren: $\mathfrak{F}$, so daß:

$$n = \varrho\, \mathfrak{V}'(\varrho) = \mathfrak{T}(\varrho) \quad \text{und} \quad \varrho = \mathfrak{F}(n).$$

Nun können wir setzen:

$$\mathfrak{V}(\varrho) = \int \mathfrak{V}'(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho = \int \frac{n}{\varrho}\, \mathrm{d}\varrho = \int_0^n n \frac{\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)}\, \mathrm{d}n;$$

also:

$$\gamma_n > \varrho\, e^{-\frac{1}{n}\int_0^n \frac{n\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)}\,\mathrm{d}n} = \mathfrak{F}(n)\, e^{-\frac{1}{n}\int_0^n \frac{n\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)}\,\mathrm{d}n}.$$

Der Ausdruck $\dfrac{n\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)}$ läßt sich leicht berechnen.

Es war $\mathfrak{T}(\varrho) = \varrho \mathfrak{V}'(\varrho)$;

also: $\mathfrak{T}'(\varrho) = \varrho \mathfrak{V}''(\varrho) + \mathfrak{V}'(\varrho)$.

Nun ist: $\mathfrak{V}'(\varrho) = \dfrac{\varkappa(\varrho)\mathfrak{V}(\varrho)}{\varrho \lg \varrho}$

und demnach: $\mathfrak{V}''(\varrho) = \dfrac{\varkappa(\varrho)\mathfrak{V}'(\varrho)}{\varrho \lg \varrho} + \dfrac{\varkappa'(\varrho)}{\varkappa(\varrho)} \mathfrak{V}'(\varrho) - \dfrac{\mathfrak{V}'(\varrho)}{\varrho} - \dfrac{\mathfrak{V}'(\varrho)}{\varrho \lg \varrho};$

also:

$$\mathfrak{T}'(\varrho) = \frac{\varkappa(\varrho)\mathfrak{V}'(\varrho)}{\lg \varrho} + \frac{\varkappa'(\varrho)}{\varkappa(\varrho)} \varrho \mathfrak{V}'(\varrho) - \mathfrak{V}'(\varrho) - \frac{\mathfrak{V}'(\varrho)}{\lg \varrho} + \mathfrak{V}'(\varrho)$$

$$= \frac{\varkappa(\varrho)\mathfrak{T}(\varrho)}{\varrho \lg \varrho} + \frac{\varkappa'(\varrho)}{\varkappa(\varrho)} \mathfrak{T}(\varrho) - \frac{\mathfrak{T}(\varrho)}{\varrho \lg \varrho}$$

$$\mathfrak{T}'(\varrho) = \frac{[\varkappa(\varrho) - 1]\mathfrak{T}(\varrho)}{\varrho \lg \varrho} + \frac{\varkappa'(\varrho)}{\varkappa(\varrho)} \mathfrak{T}(\varrho).$$

Für die zu $\mathfrak{T}(\varrho)$ inverse Funktion $\mathfrak{F}(n)$ gilt demnach:

$$\mathfrak{F}'(n) = \frac{\varkappa(\mathfrak{F})\,\mathfrak{F}(n)\lg\mathfrak{F}(n)}{\varkappa(\mathfrak{F})[\varkappa(\mathfrak{F})-1]+\varkappa'(\mathfrak{F})\mathfrak{F}\lg\mathfrak{F}}\,\frac{1}{n},$$

also:

$$\frac{n\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)} = \frac{\varkappa(\mathfrak{F})\lg\mathfrak{F}(n)}{\varkappa(\mathfrak{F})[\varkappa(\mathfrak{F})-1]+\varkappa'(\mathfrak{F})\mathfrak{F}\lg\mathfrak{F}}.$$

a) Für den einfacheren Fall $\varkappa = \text{const.}$ mithin:

$$\frac{n\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)} = \frac{\lg\mathfrak{F}(n)}{\varkappa-1};$$

addieren wir zu beiden Seiten $\lg\mathfrak{F}(n)$, so ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}[n\lg\mathfrak{F}(n)] = \lg\mathfrak{F}(n)\frac{\varkappa}{\varkappa-1},$$

also:

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}[n\lg\mathfrak{F}(n)] = \frac{\lg\mathfrak{F}(n)}{\varkappa-1};$$

d. h.

$$\underline{\frac{n\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}[n\lg\mathfrak{F}(n)]}.$$

Dies oben eingesetzt, gibt:

$$\gamma_n > \mathfrak{F}(n)\,e^{-\frac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{\varkappa}\,\mathrm{d}[n\lg\mathfrak{F}(n)]}$$

$$= \mathfrak{F}(n)\,e^{-\frac{1}{n}\frac{1}{\varkappa}n\lg\mathfrak{F}(n)}$$

$$\underline{\gamma_n > \mathfrak{F}(n)\,\mathfrak{F}(n)^{-\frac{1}{\varkappa}}},$$ wo $\mathfrak{F}$ invers zu $\mathfrak{T}(\varrho) = \varrho\mathfrak{V}'(\varrho)$.

b) Für den komplizierteren Fall $\varkappa(\varrho) =$ Funktion von ϱ verfahren wir folgendermaßen.

Wir setzen:

$$\varkappa'(\varrho) = \frac{\varkappa(\varrho)}{\varrho\lg\varrho}f(\varrho)$$

$$\frac{n\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)} = \frac{\varkappa(\mathfrak{F})\lg\mathfrak{F}}{\varkappa(\mathfrak{F})[\varkappa(\mathfrak{F})-1]+\varkappa(\mathfrak{F})f(\mathfrak{F})}$$

$$= \frac{\lg\mathfrak{F}}{\varkappa(\mathfrak{F})-1+f(\mathfrak{F})};$$

durch ein gleiches Verfahren wie oben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left[n\frac{\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)}\right] = \lg\mathfrak{F}(n)\frac{\varkappa(\mathfrak{F})+f}{\varkappa(\mathfrak{F})-1+f};$$

also schließlich:

$$\frac{n\mathfrak{F}'(n)}{\mathfrak{F}(n)} = \frac{1}{\varkappa(\mathfrak{F})+f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}[n\lg\mathfrak{F}(n)].$$

Das Einsetzen ergibt:

$$\gamma_n > \mathfrak{F}(n)\, e^{-\frac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{\varkappa(\mathfrak{F})+f(\mathfrak{F})}\, \mathrm{d}[n \lg \mathfrak{F}(n)]}.$$

Nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung ist nun:

$$\int_0^n \frac{\mathrm{d}[n \lg \mathfrak{F}(n)]}{\varkappa(\mathfrak{F})+f(\mathfrak{F})} = \frac{1}{\varkappa(\xi)+f(\xi)} \int_0^n \mathrm{d}[n \lg \mathfrak{F}(n)] = \frac{1}{\varkappa(\xi)+f(\xi)}\, n \lg \mathfrak{F}(n); \quad \text{wo}$$

$\xi = \mathfrak{F}(\alpha)$; $0 < \alpha < n$.

Demnach wird:

$$\gamma_n > \mathfrak{F}(n)\, e^{-\frac{1}{n}\frac{1}{\varkappa(\xi)+f(\xi)} n \lg \mathfrak{F}(n)} = \mathfrak{F}(n)\, \mathfrak{F}(n)^{-\frac{1}{\varkappa(\xi)+f(\xi)}}$$

$$\gamma_n > \mathfrak{F}(n)\mathfrak{F}(n)^{-\frac{1}{\varkappa(\xi)+f(\xi)}},$$ wo $\mathfrak{F}$ invers zu $\mathfrak{T}(\varrho) = \varrho\, \mathfrak{V}'(\varrho)$; $\xi = \mathfrak{F}(\alpha)$;

$0 < \alpha < n$ und $f(\varrho) = \dfrac{\varkappa'(\varrho)\, \varrho \lg \varrho}{\varkappa(\varrho)}$.

II. Wir hatten $f(x)$ als regelmäßig wachsend angenommen; bei unregelmäßig wachsendem $f(x)$ konstruieren wir wie S. 33 eine Vergleichsfunktion zu $V(\varrho)$; da hier gleichfalls wie dort nur die obere Grenze von $\lg M(\varrho)$ bezw. $M(\varrho)$ in Betracht kommt, gibt es keinen Unterschied in der Ableitung; nur am Schluß zeigt sich auch wie S. 34 ein Unterschied, insofern man im allgemeinen nicht für alle n von der Vergleichsfunktion zu der unregelmäßig wachsenden übergehen kann. — Wir können sagen:

Der absolute Betrag der n^{ten} Nullstelle ist für eine g. tr. Funktion nullter Ordnung von regulärem Wachstum größer als $F(n)\, F(n)^{-\frac{1}{\varkappa(\xi)+f(\xi)}}$; wo F invers zu $\varrho\, V'(\varrho)$; $\xi = F(\alpha)$; $0 < \alpha < n$; $\varkappa$, f wie oben erläutert (f im gegebenen Fall leicht zu bestimmen).

Ist die Funktion irregulären Wachstums, so kann man $\mathfrak{F}(n)$ nur für unendlich viele n durch $F(n)$ ausdrücken; abgesehen vom Falle „halbregulären" Wachstums.

Außer der obigen Ableitung sind noch verschiedene andere denkbar; man kann z. B. aus irgend einem Grunde wünschen, im Resultat die Inverse von $\dfrac{\mathfrak{V}(\varrho)}{\lg \varrho}$ oder $\mathfrak{V}(\varrho)$ zu erhalten. Das Verfahren ist dann ganz dasselbe.

Anmerkung 1. Aus der Formel S. 38 a) folgt:

$\gamma_n > \mathfrak{F}(n)\, \mathfrak{F}(n)^{-\frac{1}{\varkappa}} = \mathfrak{F}(y)$; wo sich y nach dem 1. Teil durch Betrachtung der inversen Funktion berechnen läßt, vgl. S. 26.

Also: $$\gamma_n > \mathfrak{F}\left(\frac{(\varkappa-1)^{\varkappa-1}}{\varkappa^{\varkappa-1}}\, n\right);$$

umgekehrt: $$n < \mathfrak{T}(\gamma_n)\,\frac{\varkappa^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)^{\varkappa-1}}.$$

Nun ist $$\mathfrak{T}(\gamma_n) = \gamma_n \mathfrak{B}'(\gamma_n) = \gamma_n \frac{\varkappa \mathfrak{B}(\gamma_n)}{\gamma_n \lg \gamma_n} = \varkappa \frac{\mathfrak{B}(\gamma_n)}{\lg \gamma_n},$$

also: $$n < \frac{\varkappa^{\varkappa}}{(\varkappa-1)^{\varkappa-1}} \frac{\mathfrak{B}(\gamma_n)}{\lg \gamma_n}.$$

Das ist genau dasselbe Ergebnis, das wir direkt für konstante $\varkappa$ gefunden hatten (S. 36).

Während also die Umkehrung der Formel für n nur eine ungenaue für γ_n ergibt, gibt die Umkehrung der Formel für γ_n eine genaue aus dem einfachen Grunde, weil *die Formel für* γ_n, die γ_n als Funktion von n darstellt, insofern die genauere ist, als in *der Formel für* n rechts nicht γ_n, sondern eine zwischen γ_n und γ_{n+1} variierende Größe τ steht.

Anmerkung 2. Mit gleichen Methoden (Verschärfung des Satzes $n \leqq \frac{\lg M(\vartheta\tau)}{\lg(\vartheta-1)}$) erhält man für die Funktionen endlicher und unendlicher Ordnung ähnlich genaue Resultate. Da diese des Interesses nicht entbehren, seien sie in vereinfachter Schreibweise hier aufgezählt:

Nullte Ordnung: $$n < \alpha \frac{\lg M(\tau)}{\lg \tau}.$$

Endliche Ordnung: $$n < \beta \lg M(\tau).$$

Unendliche Ordnung: $n < \gamma \lg M(\tau) \ldots \lg_\nu M(\tau)$; ν abhängig von dem Anwachsen von $M(\varrho)$; auch $\nu > K$, K beliebig groß;[1])

also stets: $n < \lg M(\tau) \ldots [\lg_\nu M(\tau)]^{1+\varepsilon}$, wenn kein Logarithmus komplex.

II. Schluß von der Verteilung der Nullstellen auf das Anwachsen der Funktion.

§ 3. Über das Maximum des absoluten Wertes der Funktion.

Will man von den Nullstellen aus etwas über die Funktion erschließen, so bietet sich als einfachstes Mittel die Weierstraßsche

1) α, β, γ sind endlich bleibende Funktionen.

Produktentwicklung dar, die für die g. tr. Funktionen der Ordnung Null die folgende einfache Form hat:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c_h}\right).$$

Zur Berechnung von Max. $\left(\prod_{h=1}^{\infty}\left|1-\frac{x}{c_h}\right|\right) \leqq \prod_{h=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi}{\gamma_h}\right)$, wo $|x| = \xi$, $|c_h| = \gamma_h$, braucht man nur obere Schranken für den Absolutwert des Primfaktors $\left(1-\frac{x}{c_h}\right)$ zu bestimmen; über diese ist dann das Produkt zu nehmen.

Die obere Schranke von $\left|1-\frac{x}{c_h}\right| \leqq 1+\frac{\xi}{\gamma_h}$ fällt je nach dem Werte von $\frac{\xi}{\gamma_h}$ verschieden aus: a) $\frac{\xi}{\gamma_h} \geqq 1$; d. h. $\xi \geqq \gamma_h$.

$$1+\frac{\xi}{\gamma_h} < c\,\xi,$$

wo c eine passende Konstante $\left(\text{es genügt } c = \frac{2}{\gamma_1}\right)$.

b) $\frac{\xi}{\gamma_h} < 1$; d. h. $\xi < \gamma_h$.

$$1+\frac{\xi}{\gamma_h} < e^{\frac{\xi}{\gamma_h}}.$$

Dementsprechend hat man zur Abschätzung des ganzen Produktes dasselbe in zwei Faktoren zu zerlegen:

$$|f(x)| = \prod_{h=1}^{\infty}\left|1-\frac{x}{c_h}\right| = \prod_{h=1}^{m}\left|1-\frac{x}{c_h}\right| \prod_{h=m+1}^{\infty}\left|1-\frac{x}{c_h}\right| = f_1(\xi)\,f_2(\xi),$$

wo $\gamma_m \leqq \xi < \gamma_{m+1}$; ξ ist beliebig, aber fest.

Also: $f_1(\xi) < (e\xi)^m$ und $f_2(\xi) < e^{\xi \sum_{h=m+1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_h}}$.

γ_h ist eine mit dem Stellenzeiger monoton wachsende Funktion, die natürlich nur für ganzzahlige h definiert zu sein braucht.

Definition. Erfüllt γ_h die Bedingungen, denen eine „Vergleichsfunktion“ bezw. „Vergleichsfolge“ genügen muß, so wollen wir $f(x)$ eine *Funktion mit regelmäßiger Nullstellenverteilung* nennen.

a. Es liege jetzt eine solche vor; dann haben wir $\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{\mathfrak{c}(h)}$ abzuschätzen. $\mathfrak{c}(h)$ ist eine sehr rasch wachsende Funktion, die einer der folgenden Gleichungen genügen kann:

$$\mathfrak{c}(h+1)-\mathfrak{c}(h)=\frac{\varkappa(h)\,\mathfrak{c}(h)\lg\mathfrak{c}(h)}{h}$$

. . . . . .

$$\mathfrak{c}(h+1)-\mathfrak{c}(h)=\frac{\varkappa(h)\,\mathrm{L}_\nu[\mathfrak{c}(h)]}{h},$$

wo ν ev. mit h ganzzahlig ins Unendliche wächst.

Da wir nicht die größtmögliche Genauigkeit anstreben wollen, können wir setzen:

$$\mathfrak{c}(h+1)-\mathfrak{c}(h)>\frac{\mathfrak{c}(h)}{h}\quad\text{(ziemlich ungenau).}$$

Dann haben wir:

$$[\mathfrak{c}(h-1)]^{-1}-[\mathfrak{c}(h)]^{-1}>\frac{1}{(h-1)\,\mathfrak{c}(h)}$$

oder:
$$\frac{1}{\mathfrak{c}(h)}<(h-1)\left\{[\mathfrak{c}(h-1)]^{-1}-[\mathfrak{c}(h)]^{-1}\right\},$$

also:
$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{\mathfrak{c}(h)}<m\,[\mathfrak{c}(m)]^{-1}.$$

Somit ist:

$$f_2(\xi)<e^{\xi\frac{m}{\mathfrak{c}(m)}}$$

$$f_1 f_2<e^{m\lg(c\xi)+m\frac{\xi}{\mathfrak{c}(m)}}.$$

Die inverse Funktion zu $\mathfrak{c}(h)$ sei $\mathfrak{V}$; dann ist:

$$\mathfrak{c}(m)\leqq\xi,\ \text{also}\ \mathfrak{V}[\mathfrak{c}(m)]\leqq\mathfrak{V}(\xi)$$
$$m\leqq\mathfrak{V}(\xi),$$

eingesetzt:

$$f_1 f_2<e^{\lg(c\xi)\,\mathfrak{V}(\xi)+\mathfrak{V}(\xi)\frac{\xi}{\mathfrak{c}(m)}}$$

$$M(\xi)<e^{\lg\xi\,\mathfrak{V}(\xi)\left[1+\frac{\alpha}{\lg\xi}\right]}{}^{1)},$$

also erst recht: $\underline{M(\xi)<e^{\lg\xi\,\mathfrak{V}(\xi)[1+\varepsilon]}}$, wo ε beliebig klein.

b. Ist γ_h keine Vergleichsfunktion, so konstruieren wir eine regelmäßig wachsende Vergleichsfunktion $\mathfrak{c}(h)$ z. B. derart, daß

$\gamma_h\geqq\mathfrak{c}(h)$ für *alle* hinlänglich großen h,
$\gamma_h<\mathfrak{c}(h)\,\alpha(h)$ für *unendlich viele* beliebig große h.

---

1) Wo α endlich und sicher $<\lg e+1+\frac{2}{\mathfrak{V}(\xi)}$.

Für die Summation ändert sich durch diese Wahl der Vergleichsfunktion nichts; denn es ist: $\frac{1}{\gamma_h} \leqq \frac{1}{\mathfrak{c}(h)}$. Zu beachten ist aber folgendes:

Es war $\gamma_m \leqq \xi$; jetzt haben wir festgesetzt $\mathfrak{c}(h) \leqq \gamma_h$, d. h. $\mathfrak{c}(m) \leqq \gamma_m$. Das läßt die Möglichkeit zu, daß zwischen $\mathfrak{c}(m)$ und ξ noch ein $\mathfrak{c}(m+1), \ldots, \mathfrak{c}(n)$ liege, wenngleich das bei den Funktionen nullter Ordnung bei ihrer sehr weiten Nullstellenverteilung nur ausnahmsweise eintritt.

Wir bestimmen demnach noch ein n durch

$$\mathfrak{c}(n) \leqq \xi < \mathfrak{c}(n+1), \text{ also } m \leqq n.$$

Dann ist das Restprodukt:

$$f_2(\xi) < e^{\sum_{m+1}^{n} \frac{\xi}{\gamma_h} + \xi \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\mathfrak{c}(h)}}$$

$$< e^{n-m+\xi \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\mathfrak{c}(h)}}, \text{ da } \xi < \gamma_h \text{ von } h = m+1 \text{ ab.}$$

$$< e^{n-m+\xi \frac{n}{\mathfrak{c}(n)}}$$

$$f_1 f_2 < e^{m \lg(c\xi) + n - m + \xi \frac{n}{\mathfrak{c}(n)}}.$$

Es sei $\mathfrak{V}$ invers zu $\mathfrak{c}(h)$; $\mathfrak{c}(n) \leqq \xi$ gibt: $n \leqq \mathfrak{V}(\xi)$

$$< e^{\mathfrak{V}(\xi) \lg(c\xi) + \frac{\xi \mathfrak{V}(\xi)}{c(n)} + n - m} \quad \text{(a fortiori, weil } m < n\text{)},$$

also $$\underline{M(\xi) < e^{\mathfrak{V}(\xi) \lg \xi (1+\varepsilon)}},$$

wo ε beliebig klein bei hinreichend großem ξ.

Damit haben wir den Satz:

Das Maximum des absoluten Betrages einer Funktion nullter Ordnung auf dem Kreise mit dem Radius ξ ist kleiner als $e^{\mathfrak{V}(\xi) \lg \xi (1+\varepsilon)}$, wo $\mathfrak{V}$ die inverse Funktion zu $\mathfrak{c}(h) < \gamma_h$ bedeutet.[1]) Bei Funktionen mit regelmäßiger Nullstellenverteilung kann man $\mathfrak{V}$ ersetzen durch V, invers zu γ_h.

Hat die Funktion aber „halbregelmäßige“ Nullstellenverteilung, so läßt sich $\mathfrak{V}$ ausdrücken durch V und den „Grad der Annäherung“.

---

1) ε kann ersetzt werden durch eine nach Null konvergierende Funktion: $\frac{\alpha}{\lg \xi}$.

§ 4. Über das Minimum des absoluten Wertes der Funktion.

Hilfsformeln.

Um den Gang des Beweises nicht zu unterbrechen, seien im voraus die nachher notwendigen Summenabschätzungen durchgeführt.

Es handelt sich um die Auswertung von Summen der Form:

$$(\alpha) \qquad \sum_{h=1}^{m} [\mathfrak{c}(h)]^{\nu}, \quad \text{wo } \nu = 1, 2, 3 \ldots$$

$$(\beta) \qquad \sum_{h=m+1}^{\infty} [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu}, \quad \text{wo } \nu = 1, 2, 3 \ldots$$

Dabei sollen die $\mathfrak{c}(h)$ Vergleichsfunktionen sein, die schnell wachsen und eine der folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\mathfrak{c}(h+1) - \mathfrak{c}(h) = \frac{\varkappa(h)\, \mathrm{L}_r[\mathfrak{c}(h)]}{h}; \quad r = 1, 2, 3 \ldots, \text{ ev. } = r(h).$$

Die Abschätzung kann mit elementaren Hilfsmitteln folgendermaßen durchgeführt werden:

(α) Abschätzung von $\sum_{h=1}^{m'-1} [\mathfrak{c}(h)]^{\nu}$.

1. Es ist für $a > 1$, $\nu > 1$ und ganz:

$$a^{\nu} > 1 + \nu(a-1) \quad \left(\text{denn } \frac{a^{\nu}-1}{a-1} > \nu\right).^{1})$$

Die Substitution von $\mathfrak{c}(h+1) : \mathfrak{c}(h)$ für a gibt:

$$[\mathfrak{c}(h+1)]^{\nu} - [\mathfrak{c}(h)]^{\nu} > \nu\, [\mathfrak{c}(h)]^{\nu-1} [\mathfrak{c}(h+1) - \mathfrak{c}(h)]$$

$$> \nu\, [\mathfrak{c}(h)]^{\nu-1} \frac{\mathfrak{c}(h)}{h}.^{2})$$

$$[\mathfrak{c}(h)]^{\nu} < \frac{h}{\nu} \{[\mathfrak{c}(h+1)]^{\nu} - [\mathfrak{c}(h)]^{\nu}\} < \frac{(h+1)\,[\mathfrak{c}(h+1)]^{\nu} - h[\mathfrak{c}(h)]^{\nu}}{\nu+1},$$

also:
$$\sum_{h=1}^{m'-1} [\mathfrak{c}(h)]^{\nu} < \frac{1}{\nu+1} m' [\mathfrak{c}(m')]^{\nu} < \frac{m' [\mathfrak{c}(m')]^{\nu}}{\nu}.$$

2. Bei sehr rasch wachsendem $\mathfrak{c}(h)$ ist diese Abschätzung sehr ungenau, da dann wegen der Größe von $a = \mathfrak{c}(h+1) : \mathfrak{c}(h)$ die benutzte Ungleichung $\frac{a^{\nu}-1}{a-1} > \nu$ viel zu unscharf ist. Man muß vielmehr ausgehen von:

---

1) Vgl. Pringsheim, *Math. Ann.* Bd. 58 (1904). S. 270, 304.

2) Eine genauere untere Grenze für $\mathfrak{c}(h+1) - \mathfrak{c}(h)$ führt bei der benutzten Ausgangsformel $a^{\nu} > 1 + \nu(a-1)$ zu keinem befriedigenden Resultat.

$$\frac{a^\nu - 1}{a-1} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{\nu-1}$$

und rechts statt $a = \mathfrak{c}(h+1) : \mathfrak{c}(h)$ nicht wie bisher 1, sondern

$$\mathfrak{c}(h+1) : \mathfrak{c}(h) = 1 + \frac{\varkappa(h) \lg \mathfrak{c}(h) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h)}{h}$$

setzen, d. h. einen mit h unbegrenzt wachsenden Ausdruck.

Man schreibe dann:

$$\mathfrak{c}(h+1) : \mathfrak{c}(h) = \frac{\varkappa(h) \lg \mathfrak{c}(h) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h)}{h} \left[1 + \frac{h}{\varkappa(h) \lg \mathfrak{c}(h) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h)} \right]$$

und vernachlässige die Klammer, wodurch sich aus der Gleichung eine scharfe Ungleichung ergibt. Eine leichte Umformung führt wie oben zu einer diesmal besseren oberen Grenze für $[\mathfrak{c}(h)]^\nu$. Doch wird von dieser genaueren Abschätzung im folgenden kein Gebrauch gemacht.

(β) Abschätzung von $\sum_{h=m'}^{\infty} [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu}$.

Es gilt:

$$a^{-\nu} > 1 + \nu(a^{-1} - 1) \text{ für } a < 1,\ \nu > 1.$$

Durch Substitution von $a = \mathfrak{c}(h-1) : \mathfrak{c}(h)$ ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{c}(h-1)]^{-\nu} - [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu} &> \nu [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu} [\mathfrak{c}(h-1)]^{-1} [\mathfrak{c}(h) - \mathfrak{c}(h-1)] \\ &= \nu [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu} [\mathfrak{c}(h-1)]^{-1} \frac{\varkappa(h-1) \mathrm{L}_r [\mathfrak{c}(h-1)]}{h-1} \\ &= \nu [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu} \frac{\varkappa \lg \mathfrak{c}(h-1) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h-1)}{h-1} \end{aligned}$$

oder durch leichte Rechnung:

$$\frac{(h-1)[\mathfrak{c}(h-1)]^{-\nu}}{\lg \mathfrak{c}(h-1) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h-1)} - \frac{h[\mathfrak{c}(h)]^{-\nu}}{\lg \mathfrak{c}(h) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h)} > \nu \varkappa [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu},$$

also:

$$[\mathfrak{c}(h)]^{-\nu} < \frac{1}{\nu\varkappa} \left[\frac{(h-1)[\mathfrak{c}(h-1)]^{-\nu}}{\lg \mathfrak{c}(h-1) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h-1)} - \frac{h[\mathfrak{c}(h)]^{-\nu}}{\lg \mathfrak{c}(h) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(h)} \right].$$

Die Summation von m' bis ∞ ergibt:

$$\sum_{h=m'}^{\infty} [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu} < \frac{1}{\nu\varkappa} \frac{(m'-1)[\mathfrak{c}(m'-1)]^\nu}{\lg \mathfrak{c}(m'-1) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(m'-1)}.$$

Im folgenden wird nur von der für jedes $\mathfrak{c}(h)$ der Funktionen der Ordnung Null geltenden Ungleichung Gebrauch gemacht:

$$\sum_{h=m+1}^{\infty} [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu} < \frac{1}{\nu\varkappa} \frac{m}{[\mathfrak{c}(m)]^\nu},$$

eine Ungleichung, die bei schnellerem Wachstum von $\mathfrak{c}(h)$ immer ungenauer wird.

Abschätzung des Minimums.

Bezeichnen wir mit $m(\varrho)$ das Minimum des absoluten Betrages von $f(x)$ auf dem Kreise mit dem Radius ϱ, so haben wir nach der bekannten Formel:

$$|a-b| \geqq \big||a|-|b|\big|$$

$$m(\varrho) \geqq \prod_{h=1}^{\infty} \left|1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right|.$$

a) Für $\frac{\xi}{\gamma_h} \geqq 1$ hat man:

$$\left|1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right| = \frac{\xi}{\gamma_h} - 1 = \frac{\xi}{\gamma_h}\left(1-\frac{\gamma_h}{\xi}\right).$$

b) Für $\frac{\xi}{\gamma_h} < 1$ hat man:

$$\left|1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right| = 1-\frac{\xi}{\gamma_h}.$$

Demnach können wir schreiben:

$$m(\varrho) \geqq \frac{\xi^m}{\gamma_1 \cdots \gamma_m} \prod_{h=1}^{m}\left(1-\frac{\gamma_h}{\xi}\right) \prod_{h=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right) = f_1\, f_2\, f_3,$$

wo $\gamma_m \leqq \xi < \gamma_{m+1}$.

Die Schwierigkeit, die durch $\gamma_m = \xi$ eintritt, soll nachher behandelt werden.

Abschätzung von f_1.

$$f_1 = \frac{\xi^m}{\gamma_1 \cdots \gamma_m} > \left(\frac{\xi}{\gamma_m}\right)^m.$$

Es genüge zunächst γ_h den Bedingungen, die an eine Vergleichsfunktion gestellt werden; dann ist:

$$f_1 > \left(\frac{\xi}{\mathfrak{c}(m)}\right)^m = e^{m \lg \xi - m \lg \mathfrak{c}(m)}.$$

Wir suchen das Maximum der rechten Seite durch Differentiation nach m:

$$\lg \xi = m\frac{\mathfrak{c}'(m)}{\mathfrak{c}(m)} + \lg \mathfrak{c}(m).$$

Nun ist: $$\mathfrak{c}'(m) = \frac{\varkappa(m)\mathfrak{c}(m)\lg \mathfrak{c}(m) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(m)}{m},$$

also wird hier:

$$\lg \xi = [\varkappa(m) \lg_2 \mathfrak{c}(m) \ldots \lg_r \mathfrak{c}(m) + 1] \lg \mathfrak{c}(m)$$

$$\underline{\xi = \mathfrak{c}(m)^{\varkappa \lg_2 \mathfrak{c} \ldots \lg_r \mathfrak{c} + 1}}.$$

Hieraus ist m nach den Methoden des 1. Teiles zu berechnen. Begnügen wir uns mit einer geringern Genauigkeit, so können wir setzen: $\xi < \mathfrak{c}(m)^{[\lg \mathfrak{c}(m)]^{\delta}}$, wo δ beliebig klein.

oder: $\lg \xi < [\lg \mathfrak{c}(m)]^{1+\delta}$

$[\lg \xi]^{1-\delta'} < \lg \mathfrak{c}(m)$

$e^{[\lg \xi]^{1-\delta'}} < \mathfrak{c}(m).$

Es sei wieder $\mathfrak{B}$ die inverse Funktion von $\mathfrak{c}$.

$$\mathfrak{B}\left(e^{[\lg \xi]^{1-\delta'}}\right) < \mathfrak{B}\left(\mathfrak{c}(m)\right) = m.^{1})$$

Dies eingesetzt, gibt mit der Bezeichnung $\delta' = \varepsilon$:

$$f_1 > e^{m \lg \xi - m \lg \mathfrak{c}(m)} > e^{\mathfrak{B}(\xi^{(\lg \xi)^{-\varepsilon}}) \lg \xi - \mathfrak{B}(\xi^{(\lg \xi)^{-\varepsilon}}) \lg \mathfrak{c}[\mathfrak{B}(\xi^{(\lg \xi)^{-\varepsilon}})]}$$

$$= e^{\mathfrak{B}(\xi^{(\lg \xi)^{-\varepsilon}}) \lg \xi - \mathfrak{B}(\xi^{(\lg \xi)^{-\varepsilon}}) \lg (\xi^{(\lg \xi)^{-\varepsilon}})}$$

$$= e^{\mathfrak{B}(\xi^{(\lg \xi)^{-\varepsilon}}) \lg \xi (1 - (\lg \xi)^{-\varepsilon})}.$$

Es handelt sich nun noch um die Bestimmung des Wertes von $\mathfrak{B}(\xi^{(\lg \xi)^{-\varepsilon}})$ durch Zurückführen auf $\mathfrak{B}(\xi)$ nach den Methoden des 1. Teiles; z. B. nach der Formel: $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(a - \vartheta[a-b])$; $0 < \vartheta < 1$ (vgl. S. 17) ergibt sich:

$$\mathfrak{B}\left(\xi^{\frac{1}{(\lg \xi)^{\varepsilon}}}\right) > \mathfrak{B}(\xi)\left[1 - \frac{1}{\lg \xi}\right],$$

dies oben eingesetzt gibt:

$$f_1 > e^{\mathfrak{B}(\xi) \lg \xi (1 - [\lg \xi]^{-\varepsilon})(1 - [\lg \xi]^{-1})}.$$

Abschätzung von f_2 und f_3.

Um nun f_2, f_3 berechnen zu können, müssen wir festlegen, für welche x wir die Abschätzung durchführen wollen. Denn die Nullstellen selbst müssen wir ausschließen, sonst wäre das Minimum ja Null. Wir wollen um jede Nullstelle einen kleinen Kreis mit dem Radius $\vartheta \leqq 1$ beschreiben, wo ϑ beliebig klein sein kann: $\vartheta = \frac{1}{K}$; wo $K > N$ und N beliebig vorgegeben.[2]) Für das ganze übrig bleibende

---

1) Die genauere Abschätzung ist im Prinzip gleich der obigen, nur unbequem. Da für allgemeine Sätze die obige Abschätzung scharf genug ist, empfiehlt sich die genauere nur für spezielle Beispiele.

2) Analogon zu: Vivanti-Gutzmer, Art. 290.

Gebiet soll die Bestimmung der unteren Schranke durchgeführt werden; es kann also immerhin vorkommen, daß:

$$|c_m| = \gamma_m = \xi, \quad \text{nicht bloß} \quad < \xi.$$

Dann würde in $\lg f_2$: $\lg\left(1-\frac{\gamma_m}{\xi}\right)$ unendlich werden; wir müssen daher dies Glied mit γ_m, d. h. das letzte von f_2, besonders herausheben, indem wir setzen:

$$\lg f_2 = \lg\left|\frac{x-c_m}{x}\right| + \sum_{h=1}^{m-1} \lg\left(1-\frac{\gamma_h}{\xi}\right).$$

Ist ferner noch $\gamma_{m-\nu} = \gamma_{m-\nu-1} = \ldots = \gamma_{m-1} = \gamma_m$, so sind auch diese Summanden herauszuheben. — Es genügt die Behandlung des einfachen Falles.

$$\lg f_2 = \lg\left|\frac{x-c_m}{x}\right| + \sum_{h=1}^{m-1} \lg\left(1-\frac{\gamma_h}{\xi}\right) = \lg\left|\frac{x-c_m}{x}\right| - \sum_{h=1}^{m-1}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{\gamma_h}{\xi}\right)^\nu$$

$$\lg f_3 = \sum_{h=m+1}^{\infty} \lg\left(1-\frac{\xi}{\gamma_h}\right) = -\sum_{h=m+1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{\xi}{\gamma_h}\right)^\nu,$$

d. h. nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz:

$$\lg f_2 - \lg\left|\frac{x-c_m}{x}\right| - \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{m-1} \frac{1}{\nu}\left(\frac{\gamma_h}{\xi}\right)^\nu$$

$$= \lg\left|\frac{x-c_m}{x}\right| - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\,\xi^\nu} \sum_{h=1}^{m-1} \gamma_h^\nu;$$

analog:

$$\lg f_3 = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu} \sum_{h=m+1}^{\infty} \gamma_h^{-\nu}.$$

Da die Funktion von regulärer Nullstellenverteilung sein sollte, haben wir: $\gamma_h = \mathfrak{c}(h)$, also nach der obigen Abschätzung:

$$\lg f_2 > \lg\left|\frac{x-c_m}{x}\right| - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\,\xi^\nu} \frac{m\,[\mathfrak{c}(m)]^\nu}{\nu},$$

da nun $\mathfrak{c}(m) \leqq \xi$, so folgt:

$$\lg f_2 > \lg\left|\frac{x-c_m}{x}\right| - m \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$$

$$\lg f_2 > \lg\left|\frac{x-c_m}{x}\right| - m \cdot \text{const.}$$

Analog:
$$\lg f_3 = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu} \sum_{h=m+1}^{\infty} [\mathfrak{c}(h)]^{-\nu}$$
$$> -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu} \frac{1}{\nu\varkappa} \frac{m}{[\mathfrak{c}(m)]^\nu}$$
$$= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2\varkappa} \cdot m \left[\frac{\xi}{\mathfrak{c}(m)}\right]^\nu$$
$$> -m \cdot \text{const.}$$

Man kann auch bei f_3 das erste Glied mit γ_{m+1} gesondert herausheben und erhält dann:

$$\lg f_3 > \lg \left| \frac{c_{m+1} - x}{x} \right| - (m+1) \cdot \text{const.}$$

Dies letzte ergibt sich sofort, weil $\xi < \mathfrak{c}(m+1)$.

Somit:

$$f_2 f_3 > e^{\lg \left| \frac{c_m - x}{x} \right| + \lg \left| \frac{c_{m+1} - x}{x} \right| - K_1 m - K_2 (m+1)}.$$

Nun ist nach Voraussetzung allgemein: $|c_h - x| > \vartheta$; da ferner $\frac{1}{\vartheta} = K$:

$$f_2 f_3 > e^{-\lg(K\xi) - \lg(K\xi) - Lm}$$
$$f_1 f_2 f_3 > e^{\mathfrak{V}(\xi) \lg \xi (1 - (\lg \xi)^{-\varepsilon})(1 - (\lg \xi)^{-1}) - 2\lg(K\xi) - Lm}.$$

Es war $\mathfrak{c}(m) \leqq \xi$; also durch Bilden der inversen Funktion:

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{c}(m)) \leqq \mathfrak{V}(\xi)$$
$$m \leqq \mathfrak{V}(\xi).$$

Das hier eingesetzt, gibt:

$$f_1 f_2 f_3 > e^{\mathfrak{V}(\xi) \lg \xi [1 - (\lg \xi)^{-1-\varepsilon}] - 2\lg(K\xi) - L\mathfrak{V}(\xi)}$$
$$f_1 f_2 f_3 > e^{\mathfrak{V}(\xi) \lg \xi (1-\varepsilon) - 2\lg(K\xi)},$$ da von einem bestimmten ξ ab sicher: $L < \varepsilon \lg \xi$.

Wir erhalten also für das Minimum von $f(x)$ in dem oben gekennzeichneten Gebiete:

$$m(\varrho) > e^{\mathfrak{V}(\varrho) \lg \varrho (1-\varepsilon) - 2\lg(K\varrho)}.$$

Wenn man nur ϱ hinreichend groß wählt, so ist die im Exponenten rechts stehende Differenz immer größer als jede noch so große Zahl; selbst wenn man K als (passend gewählte) wachsende Funktion von ϱ nimmt, etwa γ_h^k; k beliebig groß. Denn dann ist:

$$-2\lg(K\varrho) = -2\lg(\gamma_h^k \varrho) > -2\lg(\varrho^{k+1}) = -2(k+1)\lg\varrho;$$

$$m(\varrho) > e^{\mathfrak{V}(\varrho)\lg\varrho(1-\varepsilon)-2(k+1)\lg\varrho} = e^{\mathfrak{V}(\varrho)\lg\varrho\left[1-\varepsilon-\frac{2(k+1)}{\mathfrak{V}(\varrho)}\right]}$$

$$\underline{\boldsymbol{m(\varrho) > e^{\mathfrak{V}(\varrho)\lg\varrho(1-\delta)}}}.$$

D. h.

Schließt man die Nullstellen durch Kreise mit dem Radius γ_h^{-k}, wo k beliebig groß, aus, so ist das Minimum des Absolutbetrages einer Funktion nullter Ordnung mit regulärer Nullstellenverteilung auf dem Kreise mit dem Radius ϱ größer als $e^{\mathfrak{V}(\varrho)\lg\varrho(1-\delta)}$; wo δ beliebig klein, $\mathfrak{V}(\varrho)$ invers zu γ_h.

In der Regel werden in der Analysis nur Funktionen mit regelmäßiger Nullstellenverteilung vorkommen; darum soll die entsprechende Ableitung für unregelmäßige Verteilung nur angedeutet werden.

Da ist von Wichtigkeit vor allem, wie die Vergleichsfunktion angesetzt wird. Am leichtesten ist es, so zu verfahren. Man setzt:

$$\mathfrak{c}(h) < \gamma_h \alpha(h)$$
$$\alpha(h)\mathfrak{c}(h) > \gamma_h,$$

wo das eine für alle hinlänglich großen, das andere für unendlich viele beliebig große h gilt. (Am schärfsten wird das Ergebnis, wenn man, falls möglich, zwei Funktionen $\alpha(h)$ nimmt $[\alpha_1(h), \alpha_2(h)]$ und diese so bestimmt, daß beide Ungleichungen für alle h, die hinlänglich groß sind, gelten.)

Besonders ist auf die Abschätzungen zu achten, da bei diesen verschiedene Grenzen in Frage kommen, einmal nach oben, dann nach unten. Prinzipielle Schwierigkeiten liegen jedoch nicht vor.

Bei *jedem* „halbregulären" Wachstum ist die Formulierung des Satzes dieselbe wie oben, weil dort nur geringere Genauigkeit zugelassen wurde. Unterschiede zeigen sich erst bei schärferen Abschätzungen.

§ 5. Allgemeine Folgerungen über die Wertverteilung.

Der letzte Satz gibt zu einigen wichtigen Folgerungen Anlaß.

Zunächst können wir feststellen, daß bei Funktionen nullter Ordnung nicht nur kein „Picardscher Ausnahmefall" eintritt[1]), sondern daß sogar in einem genügend großen Kreise die Zahl der Nullstellen genau gleich ist der Zahl der Stellen, an denen die Funktion einen beliebig

1) Schon bekannt; vgl. Pringsheim, Math. Annalen, Band 58.

gegebenen Wert a annimmt, es gibt nicht eine mehr und nicht eine weniger.

Das hängt mit der aus dem Minimumsatze folgenden Tatsache zusammen, daß die Funktion nullter Ordnung *auf allen ständig ins Unendliche führenden Wegen,* die in die oben beschriebenen Kreise nicht eindringen, *unbegrenzt wächst;* was ja schon bei Funktionen endlicher Ordnung gar nicht der Fall ist, während es sogar Funktionen unendlicher Ordnung gibt, die auf *allen Strahlen* ins Unendliche unbegrenzt *abnehmen.*[1])

Wir gehen zum Beweise auf den Cauchyschen Satz zurück, der die genaue Anzahl der Nullstellen in einem Bereiche angibt:

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx;$$ wo C der Rand des Bereiches.

Die Stellen, an welchen $f(x)$ den Wert a annimmt, sind die Nullstellen von $f(x)-a$. Wir haben dann:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \\ n_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(x)}{f(x)-a}\,dx \end{aligned}\right| \quad K \text{ (Kreis um den Anfangspunkt) hinreichend groß.}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(x)}{f(x)\left(1-\frac{a}{f(x)}\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{d\left(1-\frac{a}{f(x)}\right)}{1-\frac{a}{f(x)}} \qquad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

$$= n_1,$$

wenn wir $|x| = \xi$ so groß wählen, daß $|f(x)| > |a|$; da bekanntlich $\int_K d\lg(1-u) = 0$ für $|u|<1$, wie die Entwicklung in eine Reihe zeigt.

Der Minimumsatz gibt uns auch einen näheren Aufschluß über die Lage der Stellen, an denen die Funktion einen Wert a annimmt; d. h. über ihre Lage im Verhältnis zu den Nullstellen: es läßt sich der Satz beweisen:

Die Stellen, an denen die Funktion den Wert a annimmt, liegen immer in dem mit beliebig kleinem Radius um eine Nullstelle beschriebenen Kreise; der Radius kann den Wert γ_n^{-k} annehmen, wo k beliebig groß.

1) Vgl. Mittag-Leffler, Verhandlungen des III. Internationalen Mathematikerkongresses zu Heidelberg. Leipzig 1905, S. 263.

Wir setzen: $f_1(x) = f(x) + a$, wo a beliebig.

Es sei $x_0 = c_h$ eine Nullstelle von $f(x)$; dann ist:

$$f_1(x_0) = a.$$

Gäbe es nun keine Nullstelle von $f_1(x)$ im Abstande $< \vartheta$ von x_0, so wäre für hinreichend große x_0:

$$|f_1(x_0)| > e^{\Re(|x_0|)\lg|x_0|(1-\varepsilon)} \text{ nach dem Minimumsatze;}$$

oder: $$|a| > e^{\Re(|x_0|)\lg|x_0|(1-\varepsilon)};$$

es ist aber: $|a| < K$; denn a ist eine *konstante*, wenn auch beliebig hoch wählbare Größe.

Die Annahme führt also zu einem Widerspruch.[1])

1) Offenbar wird der Beweis hinfällig für Funktionen, für die der obige Minimumsatz nicht gilt, d. h. für g. tr. Funktionen endlicher und unendlicher Ordnung.

Dritter Teil.

Beispiele.

1. Rückblick und Ausblick. Es war im 2. Teil unser Ziel, möglichst allgemeine und einfache Sätze zu gewinnen; dazu reichte, wie immer betont, eine geringere Genauigkeit in den Abschätzungen aus. Diese ist auch vollkommen genügend, um spezielle Resultate zu gewinnen analog denen, die Lindelöf für g. tr. Funktionen *endlicher* Ordnung gefunden hat.

a) Gleichzeitig sollten die häufigen Hinweise auf die geringere Genauigkeit der Abschätzungen die Möglichkeit von Verschärfungen der Sätze hervorheben. Diese sind mit den neuen Prinzipien dieser Arbeit leicht zu erreichen; nur sind vorerst noch ergänzende Sätze abzuleiten, und zwar über die untere Grenze von $m(\varrho)$ bei gegebener oberer Grenze von γ_n. Dann kann man immer tiefer in das feinere Gefüge der Funktionen eindringen; immer deutlicher treten die vorher in den allgemeinen Sätzen verborgen gebliebenen Folgen der *größeren* und *geringeren* „Regelmäßigkeit" oder „Unregelmäßigkeit" der Funktionen hinsichtlich Anwachsen oder Wertverteilung hervor. Die Sätze werden aber naturgemäß komplizierter; darum war ihre Ableitung in einer ersten Arbeit nicht ratsam; sie sind ja auch weniger wichtig.[1])

b) Gleichfalls wegen ihrer geringeren Wichtigkeit sind in dieser Arbeit die unregelmäßigen Funktionen zurückgetreten[2]): diese sind doch alle mit ganz verschwindenden Ausnahmen künstlich konstruiert, d. h. sie bieten sich nicht von selbst in der Analysis dar; zumal bei den Funktionen der Ordnung Null, bei denen sich, wie aus dem bis-

1) Eine naheliegende Verschärfung bei gewisser, aber nicht notwendig weitgehender Regelmäßigkeit ist z. B. die Angabe des durch die Inverse zu lg $M(\varrho)$ ausdrückbaren Radius des Kreises, in dem *genau n* Nullstellen liegen.

2) Abgesehen von den halbregelmäßigen. Diese wollen wir dem Brauch zuliebe im folgenden mit zu den regelmäßigen (im *weiteren Sinne*) rechnen.

herigen hervorgeht, Regelmäßigkeit des Wachstums und Regelmäßigkeit der Wertverteilung gegenseitig bedingen, während schon bei den Funktionen endlicher Ordnung als Ausnahmefall[1]) regelmäßiges Wachstum mit unregelmäßiger Verteilung der Nullstellen verbunden auftreten kann.

Die hauptsächlich für regelmäßige Funktionen ausgesprochenen Sätze nun mit *entsprechenden* Änderungen auf unregelmäßige Funktionen auszudehnen, bietet aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten, wenn man sich gewisse Unregelmäßigkeiten ausdenkt und ihre Folgen untersucht. Will man aber die allgemeinsten Sätze erhalten, so muß man erst über die zulässigen Unregelmäßigkeiten orientiert sein: die Unregelmäßigkeiten des Wachstums von $M(\varrho)$ können (im Gegensatz zu denen der Nullstellenverteilung) nämlich nicht ganz beliebig sein, das ist bekannt; aber worin die in den Unregelmäßigkeiten waltende Gesetzmäßigkeit besteht, auch wie es kommt, daß eine solche besteht trotz unregelmäßigster Nullstellenverteilung, weiß man noch nicht.

Eine Untersuchung dieser Dinge wäre also — neben der unter a) erwähnten Verschärfung der Sätze — die zunächst sich darbietende Aufgabe zum weiteren Ausbau eines Gebietes der Funktionentheorie, das wegen der Tragweite seiner Sätze und deren Folgerungen eines der wichtigsten ist.

2. Beispiele.

a) Die in dieser Arbeit abgeleiteten Sätze gelten für alle g. tr. Funktionen nullter Ordnung, auch für die, welche man als „transfiniter Ordnung“ bezeichnen könnte. Z. B. seien die Nullstellen $(n\,;n)$, wenn man mit $(a\,;b)$ das Resultat der direkten Operation vierter Stufe bezeichnet[2]). Dann gilt einerseits für das Maximum des absoluten Betrages der entsprechenden Funktion auf dem Kreise mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt:

$$M(\varrho) < e^{\varphi(\varrho)\lg\varrho(1+\varepsilon)},$$
$$\text{wo} \quad \left.\begin{aligned} \varphi(x) &= y \\ x &= (y\,;y) \end{aligned}\right\}$$

andrerseits ist für das Minimum des absoluten Betrages der Funktion außerhalb der beliebig kleinen Kreise um die Nullstellen für die Argumente vom absoluten Betrag ϱ:

$$m(\varrho) > e^{\varphi(\varrho)\lg\varrho(1-\varepsilon)}.$$

---

1) Daß das ein Ausnahmefall, ist die beweisbare Vermutung von Borel, vgl. Fonctions entières, S. 117.

2) Vgl. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, S. 27.

Einen expliziten analytischen Ausdruck für $\varphi(\varrho)$ können wir aber nicht angeben, wie überhaupt bei *allen* g. tr. Funktionen von *transfinit* nullter Ordnung. Daran scheitert die *vollständige* Formulierung der Sätze; wir müssen uns stets damit begnügen, anzugeben, von welcher rasch wachsenden Funktion die gesuchte die inverse ist. Das reicht indessen für das Verständnis aus, da beide Funktionen durch dieselbe Kurve dargestellt werden.

Diese Unmöglichkeit einer vollständigen Lösung beruht darauf, daß man zwar analytische Ausdrücke von Funktionen bilden kann, die schneller wachsen als jede noch so hoch getürmte Exponentialfunktion, aber nicht von Funktionen, die langsamer wachsen als jeder noch so oft iterierte Logarithmus. Für diese gibt uns die heutige Analysis keine *expliziten* Ausdrücke; man kann also zwar z. B. definieren:

$$y = (x\,;x)$$
$$y = e_x(x) \text{ usw.}$$

für ganzzahlige x (für die andern wird interpoliert),

aber die inversen langsam wachsenden Funktionen lassen sich nicht ausdrücken; denn die einzige Möglichkeit wäre für ganzzahlige $\varkappa(x)$:

$$\lg_{\varkappa(x)} x\,,$$

wo $\varkappa(x)$ mit x unbegrenzt wächst. Nach den Bemerkungen von S. 22 darf aber $\varkappa(x)$ nicht zu schnell wachsen, damit der Logarithmus reell bleibt. Wie man leicht sieht, muß sein:

$$\varkappa(e^x) = \varkappa(x) + \vartheta(x),$$

wo: $\vartheta(x) > 0$, bei Gleichheit wäre $\varkappa(x) = \text{const.}$,

$\vartheta(x) < 1$, bei Gleichheit wäre $\lg_{\varkappa(x)} x = \text{const.}$

Eine derartig langsam wachsende Funktion gibt es aber in der *heutigen* Analysis nicht.

b) Somit ist es überflüssig, spezielle Beispiele für die Sätze des 2. Teiles aus den g. tr. Funktionen von transfinit nullter Ordnung auszuwählen, man muß ja die Formulierung des allgemeinen Satzes beibehalten. Dagegen ist es von Interesse, die Begriffsbildungen von Lindelöf für g. tr. Funktionen endlicher Ordnung auf die nullte zu übertragen, vgl. S. 10.

Um möglichst genau zu verfahren, setzen wir an:[1])

$$M(\varrho) = e^{\tau(\varrho)\lg\varrho\,(\lg_\nu\varrho)^{\alpha_\nu}\ldots(\lg_{\nu+p}\varrho)^{\alpha_{\nu+p}}}, \text{ mit } \alpha_\nu > 0;$$

1) Vgl. Pringsheim, *Math. Ann.*, **58** (1904) S. 264 f.
Lindelöf, *Ann. Éc. Norm.* (3) **22** (1905).

dabei ist $\tau(\varrho)$ eine stetige positive Funktion, welche die beiden Ungleichungen erfüllt:

$\tau(\varrho) < (\lg_{\nu+p} \varrho)^{\varepsilon}$ für *alle* $|x| = \varrho > R$,

$\tau(\varrho) > (\lg_{\nu+p} \varrho)^{-\varepsilon}$ für *unendlich viele* beliebig große x.

Nun lassen sich immer drei Fälle unterscheiden:

1. *Minimaltypus:* $\tau(\varrho)$ konvergiert mit unbegrenzt wachsendem ϱ nach Null; d. h.

$\tau(\varrho) < \varepsilon$ für *jedes* $\varepsilon > 0$ und *alle* $\varrho > R_\varepsilon$,

$\tau(\varrho) > (\lg_{\nu+p} \varrho)^{-\delta}$ für *jedes* $\delta > 0$ und *gewisse beliebig große* x.

2. *Maximaltypus*: $\tau(\varrho)$ überschreitet mit wachsendem ϱ jede vorgegebene Grenze, d. h.

$\tau(\varrho) < (\lg_{\nu+p} \varrho)^{\delta}$ für *jedes* $\delta > 0$ und *alle* $\varrho > R_\delta$,

$\tau(\varrho) > \dfrac{1}{\varepsilon}$ für *jedes* $\varepsilon > 0$ und *gewisse beliebig große* x.

3. *Normaltypus*: $\tau(\varrho)$ bleibt für jedes ϱ unter einer endlichen Grenze, ohne nach Null zu konvergieren, d. h. bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$\tau(\varrho) < \gamma(1 + \varepsilon)$ für *alle* $\varrho > R_\varepsilon$,

$\tau(\varrho) > \gamma(1 - \varepsilon)$ für *gewisse beliebig große* x.

Um nun den Satz von S. 39 anwenden zu können, müssen wir die Umkehrung von $\varrho \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho} \lg M(\varrho)$ bestimmen:

Es ist zunächst:

$$n = \mathfrak{T}(\varrho) = \varrho\, \mathfrak{V}'(\varrho) = (1 + \delta(\varrho))\, \tau(\varrho)\, (\lg_\nu \varrho)^{\alpha_\nu} \ldots (\lg_{\nu+p} \varrho)^{\alpha_{\nu+p}},$$

wo $\delta(\varrho)$ wie auch später eine gewisse nach Null konvergierende Funktion bedeutet.

Die Umkehrung von $\varrho\, \mathfrak{V}'(\varrho)$ geschieht im engsten Anschluß an Lindelöf[1]) durch sukzessives Logarithmieren:

$$\lg \mathfrak{T}(\varrho) = \alpha_\nu \lg_{\nu+1} \varrho\, (1 + \delta_1(\varrho))$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lg_p \mathfrak{T}(\varrho) = \lg_{\nu+p} \varrho\, (1 + \delta_p(\varrho))$$

Die so gefundenen Ausdrücke für $\lg_{\nu+1} \varrho, \ldots, \lg_{\nu+p} \varrho$ werden in $\mathfrak{T}(\varrho)$ eingesetzt, das gibt eine Formel für $\lg_\nu \varrho$ und damit für ϱ:

$$\varrho = e_\nu^{\left(\right.} (1 + \varepsilon_n) \left[\alpha_\nu^{\alpha_\nu + 1} \frac{}{\tau(n)}\, n\, (\lg n)^{-\alpha_\nu + 1} \ldots (\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}} \right]^{\frac{1}{\alpha_\nu}} \left.\right).$$

1) Vgl. *Acta Soc. Fennicae* **31.** (1901), S. 21.

Bei dem Minimaltypus hat man für

$$(1+\varepsilon_n)\left[\frac{\alpha_\nu^{\alpha_{\nu+1}}}{\tau(n)}\right]^{\frac{1}{\alpha_\nu}} \text{ zu setzen: } \frac{1}{\varepsilon(n)},$$

bei dem Normaltypus für $\tau(n)$: γ,

bei dem Maximaltypus für $(1+\varepsilon_n)\left[\frac{\alpha_\nu^{\alpha_{\nu+1}}}{\tau(n)}\right]^{\frac{1}{\alpha_\nu}}$ dagegen: $(\lg_p n)^{-\varepsilon}$.

Das gefundene ϱ hat man einzusetzen in die Formel von S. 39, wobei man die beiden Fälle $\nu = 1$; $\nu > 1$ zu trennen hat.

Es ergibt sich:

Es sei $f(x)$ eine g. tr. Funktion von der „Ordnung“ $(\alpha_\nu, \ldots, \alpha_{\nu+p})$.

(α) Ist sie vom Maximaltypus, so ist:

$$\gamma_n > e_\nu\left(\left[n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}}\ldots(\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\alpha_\nu}}\right)$$

oder:

$$\lim_{n=\infty}\frac{n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}}\ldots(\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}}}{(\lg_\nu \gamma_n)^{-\alpha_\nu+\delta}} = 0 \text{ für jedes } \delta > 0.$$

(β) Ist sie vom Normaltypus, so ist schon:

$$\gamma_\nu > e_\nu\left((1-\varepsilon)\left[g\,n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}}\ldots(\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}}\right]^{\frac{1}{\alpha_\nu}}\right),$$

wo: $$g = \text{const.} = \frac{\alpha_\nu^{\alpha_\nu}}{(\alpha_\nu+1)^{\alpha_\nu+1}}\,\frac{\alpha_\nu^{\alpha_{\nu+1}}}{\gamma}, \text{ bzw. } \frac{\alpha_\nu^{\alpha_{\nu+1}}}{\gamma},$$

je nachdem $\nu = 1$ oder $\nu > 1$,

oder:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}}\ldots(\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}}}{(\lg_\nu \gamma_n)^{\alpha_\nu}} = g \text{ (wo } g \text{ also endlich).}$$

(γ) Ist sie vom Minimaltypus, so ist sogar:

$$\gamma_n > e_\nu\left(\frac{1}{\varepsilon}\left[n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}}\ldots(\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}}\right]^{\frac{1}{\alpha_\nu}}\right)$$

oder:

$$\lim_{n=\infty}\frac{n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}}\ldots(\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}}}{(\lg_\nu \gamma_n)^{\alpha_\nu}} = 0.$$

Genau die Umkehrung dieser drei Sätze liefert uns der Maximumsatz; wir können hinter jeden Satz setzen: *„und umgekehrt“*. Zur

Herleitung haben wir die Inverse zu $\mathfrak{c}(n) < \gamma_n$ zu bilden, was ebenfalls durch sukzessives Logarithmieren von $\lg_\nu \mathfrak{c}(n)$ geschehen kann; auch im übrigen ist das Verfahren dasselbe.

Schließlich gibt der Minimumsatz auf genau dieselbe Weise wie der Maximumsatz:

$$\textit{Ist} \quad (\alpha) \quad \lim_{n=\infty} \frac{n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}} \dots (\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}}}{(\lg_\nu \gamma_n)^{\alpha_\nu}} = 0$$

$$(\beta) \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}} \dots (\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}}}{(\lg_\nu \gamma_n)^{\alpha_\nu}} = g$$

$$(\gamma) \quad \lim_{n=\infty} \frac{n(\lg n)^{-\alpha_{\nu+1}} \dots (\lg_p n)^{-\alpha_{\nu+p}}}{(\lg_\nu \gamma_n)^{\alpha_\nu+\delta}} = 0 \textit{ für jedes } \delta > 0,$$

so gilt für das Minimum des absoluten Betrages der Funktion auf dem Kreise mit dem Radius ϱ um den Nullpunkt, wenn die Nullstellen durch Kreise mit dem Radius γ_n^{-k} (k beliebig groß) ausgeschlossen werden:

$$(\alpha) \quad m(\varrho) > e^{\lg \varrho (\lg_\nu \varrho)^{\alpha_\nu} \dots (\lg_{\nu+p} \varrho)^{\alpha_{\nu+p}-\varepsilon}} \quad \textit{für jedes } \varepsilon > 0,$$

$$(\beta) \quad m(\varrho) > e^{\gamma(1-\varepsilon) \lg \varrho (\lg_\nu \varrho)^{\alpha_\nu} \dots (\lg_{\nu+p} \varrho)^{\alpha_{\nu+p}}} \quad \textit{für jedes } \varepsilon > 0,$$

$$(\gamma) \quad m(\varrho) > e^{\frac{1}{\varepsilon} \lg \varrho (\lg_\nu \varrho)^{\alpha_\nu} \dots (\lg_{\nu+p} \varrho)^{\alpha_{\nu+p}}} \quad \textit{für jedes } \varepsilon > 0;$$

und zwar für alle zugelassenen x. (*Über γ vgl. vorige Seite.*)

Ein solcher Satz gilt bei Funktionen, die nicht nullter Ordnung sind, nur für das Maximum; hierin zeigt sich eine Besonderheit der Funktionen der Ordnung Null.

Zum Schlusse möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Gutzmer, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke und der durch das mir bewiesene Interesse und durch fördernden Rat, besonders hinsichtlich wichtiger Fragen des ersten Teiles, meine Untersuchung unterstützt hat, meinen ergebensten Dank aussprechen.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, August Ferdinand Hans Zöllich, evangelischer Konfession, am 25. November 1884 zu Lauchstedt, Kreis Merseburg, als Sohn des Postsekretärs August Zöllich und dessen Ehefrau Anna geb. Holtzhausen. Zuerst besuchte ich ein Jahr die Bürgerschule zu Sangerhausen. Meine weitere Schulbildung genoß ich sodann in den Franckeschen Stiftungen zu Halle a. S., wo ich zunächst $2\,^1/_2$ Jahre die Vorschule, und von Michaelis 1894 ab die Lateinische Hauptschule besuchte. Diese verließ ich Michaelis 1903 mit dem Zeugnis der Reife, um mich dem Studium der Mathematik zu widmen. Meine ganze bisherige Studienzeit brachte ich an der Universität Halle a. S. zu. Am 7. März 1908 bestand ich das Examen rigorosum.

Teilgenommen habe ich an den Vorlesungen, Seminarien und Übungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten:

Abert, Aschaffenburg, Berger, F. Bernstein, G. Cantor, Dorn, Ebbinghaus, Eberhard, Fries, Geissler, Goldschmidt, Gutzmer, Muff, A. Riehl, Robert, K. Schmidt, Schultze, H. Schwarz, Vaihinger, Walter (†), Wangerin, Wüst.

Aller meiner verehrten Lehrer, besonders aber der Herren Professoren Gutzmer, Ebbinghaus und A. Riehl werde ich mich stets als dankbarer Schüler erinnern.